

제 9 장

시간에 따라 변하는 전자계와 맥스웰 방정식

9.1 패러데이 법칙

- 시간에 따라 변하는 자계 $\rightarrow$ 자계 내의 폐회로에 기전력 발생

$$\text{emf} = -\frac{d\Phi}{dt} [\text{V}], \text{ where } \Phi : \text{폐선로 내부의 면을 통과하는 자속}$$

- $d\Phi/dt \neq 0$ 인 경우
 - 정지된 폐곡로를 쇠교하면서 시간에 따라 변하는 자속
 - 일정한 자속에서 상대적으로 운동하는 폐곡로
- 렌츠(Lenz)의 법칙 : 부호결정, 유도전압에 의한 자속은 원래 자속과는 반대 방향으로 생성
- 권선수가 N 인 폐곡로의 경우

$$\text{emf} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

- 기전력의 정의

$$\begin{aligned} \text{emf} &= \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &\downarrow \\ \text{emf} &= \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

- 총 기전력 = 정지폐곡로 (시간에 따라 변하는 자속) + 일정한 자속 (운동하는 폐곡로)

- 정지폐곡로 내의 시변 자계

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

↓ Stokes's law

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\Rightarrow (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} : \text{맥스웰 방정식의 미분형}$$

cf. 정전계

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \text{ and } \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

- 정상자계 움직이는 폐곡로 (그림 9.1)

- 임의의 시간 t 에 폐곡로 내부를 관통하는 자속 : $\Phi = Byd$

$$\text{emf} = - \frac{d\Phi}{dt} = -B \frac{dy}{dt} = -Bvd$$

- 자속 밀도 $\mathbf{B}$ 내에서 속도 $\mathbf{v}$ 로 운동하는 전하 Q 에 작용하는 힘

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ or } \frac{\mathbf{F}}{Q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- 운동 전계세기 (motional electric field intensity)

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- 도체 막대에 의한 운동 기전력(motional emf)

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{L} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}$$

$$\oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} = \int_d^0 vBdx = -Bvd$$

- 전체 기전력

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}$$

[응용예제 9.1] $\epsilon = 10^{-11}[\text{F/m}]$, $\mu = 10^{-5}[\text{H/m}]$, $B_x = 2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \sin 10^{-3} y [\text{T}]$.

(a) $\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, $\mathbf{E}$?

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{B}) = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\because \mathbf{B} = \mu \mathbf{H})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} B_x \mathbf{a}_y - \frac{\partial}{\partial y} B_x \mathbf{a}_z \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} (2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \sin 10^{-3} y) \mathbf{a}_z \\ &= -2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \frac{\partial}{\partial y} \sin 10^{-3} y \mathbf{a}_z \\ &= -2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \cdot 10^{-3} \cos 10^{-3} y \mathbf{a}_z \\ &= -2 \times 10^{-7} \cos 10^5 t \cos 10^{-3} y \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

$$\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{B}) = -2 \times 10^{-7} \cos 10^5 t \cos 10^{-3} y \mathbf{a}_z$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{\mu \epsilon} \int -2 \times 10^{-7} \cos 10^5 t \cos 10^{-3} y dt \mathbf{a}_z \\ &= -\frac{1}{\mu \epsilon} 2 \times 10^{-7} \cos 10^{-3} y \int \cos 10^5 t dt \mathbf{a}_z \\ &= -\frac{2 \times 10^{-7} \cos 10^{-3} y}{10^{-11} \times 10^{-5}} \times 10^{-5} \sin 10^5 t \mathbf{a}_z \\ &= -2 \times 10^4 \cos 10^{-3} y \sin 10^5 t \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

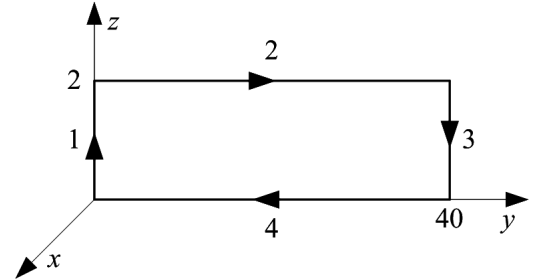
(b) $t = 1 [\mu s]$, $x = 0$, $0 < y < 40[m]$, $0 < z < 2[m]$ 인 면을 관통하는 전체 자속 Φ ?

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\
 &\downarrow \mathbf{B} \text{와 } \mathbf{S} \text{는 평행} \\
 &= \int_{y=0}^{40} \int_{z=0}^2 B_x dz dy \\
 &= \int_{y=0}^{40} \int_{z=0}^2 2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \sin 10^{-3} y dz dy \\
 &= 2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \int_{y=0}^{40} \sin 10^{-3} y \int_{z=0}^2 dz dy \\
 &= 4 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \int_{y=0}^{40} \sin 10^{-3} y dy \\
 &= 4 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \times \frac{1}{10^{-3}} [-\cos 10^{-3} y]_0^{40} \\
 &= 4 \times 10^{-1} \cos 10^5 t \times (\cos 0 - \cos 0.04) \\
 &\downarrow t = 10^{-6} \\
 \Phi &= 0.4 \times \cos 0.1 \times (1 - 0.9992) \\
 &= 0.4 \times 0.995 \times 0.0008 \\
 &= 0.3184 \times 10^{-3} [\text{Wb}]
 \end{aligned}$$

(c) (b)의 주위의 $\mathbf{E}$ 의 선적분?

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \text{emf}$$

$$\begin{aligned}
 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} &= \int_1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_4 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\
 &\downarrow \int_2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_4 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \\
 &= \int_1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\int_1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} &= \int_0^2 E_z dz \Big|_{y=0} \\
&= \int_0^2 -2 \times 10^4 \cos 10^{-3}y \sin 10^5 t dz \Big|_{y=0} \\
&= -2 \times 10^4 \cos 10^{-3}y \sin 10^5 t \int_0^2 dz \Big|_{y=0} \\
&= -20000 \times \cos 0 \times \sin 0.1 \times 2 \\
&= -40000 \times \cos 0 \times \sin 0.1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} &= \int_2^0 E_z dz \Big|_{y=40} \\
&= \int_2^0 -2 \times 10^4 \cos 10^{-3}y \sin 10^5 t dz \Big|_{y=40} \\
&= -2 \times 10^4 \cos 10^{-3}y \sin 10^5 t \int_2^0 dz \Big|_{y=40} \\
&= -20000 \times \cos 0.04 \times \sin 0.1 \times (-2) \\
&= 40000 \times \cos 0.04 \times \sin 0.1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} &= \int_1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\
&= 40000 \times \sin 0.1 \times (-\cos 0 + \cos 0.04) \\
&= -3.1942 [\text{V}]
\end{aligned}$$

[응용예제 9.2] $d = 7\text{cm}$, $B = 0.3\mathbf{a}_z[\text{T}]$, $v = 0.1\mathbf{a}_y e^{20y}[\text{m/s}]$, $t = 0$ 일 때 $y = 0$.

(a) $v(t = 0)$

$$v = 0.1e^{20y} = 0.1e^0 = 0.1 [\text{m/s}]$$

(b) $y(t = 0.1)$

$$v = \frac{dy}{dt} = 0.1e^{20y}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{0.1e^{20y}} dy &= dt \\ \int 10e^{-20y} dy &= \int dt \\ \frac{10}{-20} e^{-20y} &= t + c \\ -0.5e^{-20y} &= t + c \\ e^{-20y} &= -2t - 2c \\ -20y &= \ln(-2t - 2c) \\ y &= -\frac{1}{20} \ln(-2t - 2c) \\ \downarrow \quad t = 0, y = 0, -0.5e^0 = c &\rightarrow c = -0.5 \\ y &= -\frac{1}{20} \ln(-2t + 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(t = 0.1) &= -\frac{1}{20} \ln(-2 \times 0.1 + 1) \\ &= 0.01115 \\ &= 1.115 \text{ [cm]}\end{aligned}$$

(c) $v(t = 0.1)$

$$\begin{aligned}v &= 0.1e^{20y} \Big|_{y=0.01115} \\ &= 0.1e^{20 \times 0.01115} \\ &= 0.125 \text{ [m/s]}\end{aligned}$$

(d) V_{12} at $t = 0.1$

$$\text{emf} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dy}{dt}d = -Bvd$$

$$V_{12} = -0.3 \times 0.125 \times 7 \times 10^{-2}$$

$$= -2.625 \times 10^{-3}$$

$$= -2.625 \text{ [mV]}$$

9.2 변위전류

- 전계가 시간에 따라 변하는 경우

- 정상자계 : 암페어의 주회법칙에서

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} \equiv 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

- 시변자계

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{G}, \text{ where } \mathbf{G} : \text{미지항}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{G}$$

$$\Rightarrow \mathbf{G} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

↓

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

- 변형된 미분형 암페어의 주회법칙

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \text{ where } \mathbf{J}_d : \text{변위 전류 밀도}$$

cf. 체적 전하밀도가 0인 매질($\mathbf{J} = 0$)에서

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{vs.} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- 표면을 통과하는 총 변위전류

$$I_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

- Stokes' law

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + I_d = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

9.3 맥스웰 방정식

- 미분형 및 적분형 맥스웰 방정식

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v &\iff \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{vol} \rho_v dv \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &\iff \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &\iff \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 &\iff \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0\end{aligned}$$

- 보조 방정식

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} : \text{전도전류밀도}$$

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v} : \text{체적전하밀도에 의한 대류전류밀도}$$