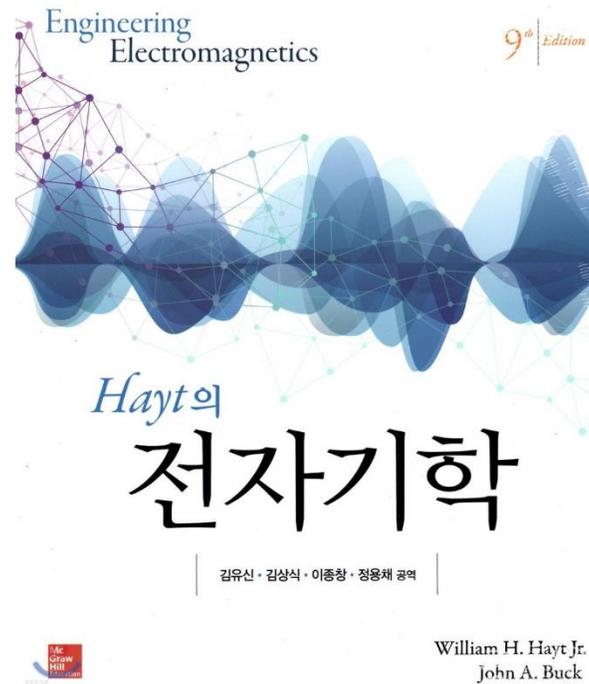


전기자기학 I

(강의자료 #4)



교과목명 : 전기자기학 I

담당교수 : 이수형

E-mail : soohyong@uu.ac.kr

교재명 : Hayt의 전자기학



Ch. 4. 에너지와 전위

*Hayt*의

전자기학

CH. 4 : 에너지와 전위

- 목적 : 전위(전위계)를 정의하고 이를 이용해 전계를 구한다.
 - 1) 전계 내에서 점전하를 이동시키는 데 소요되는 에너지
 - 2) 선적분
 - 3) 전위차 및 전위의 정의
 - 4) 점전하에 의한 전위
 - 5) 전하 시스템의 전위계; 보존적 성질
 - 6) 전위 경도
 - 7) 전기쌍극자
 - 8) 정전계 내의 에너지밀도

4.1 전계내에서 점전하를 이동시키는데 소요되는 에너지

- 전계의 세기(\mathbf{E} ; electric field intensity)
 - 전계 내의 단위시험전하에 작용하는 힘
- 전계 \mathbf{E} 내에서 전하 Q 를 한 점에서 다른 점까지 이동시킬 때 필요한 에너지;

전계에 의해서 Q 에 작용하는 힘 : $\mathbf{F}_E = Q\mathbf{E}$

→ 이 힘의 $d\mathbf{L}$ 방향의 성분 : $F_{EL} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{a}_L = Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_L$

→ 전하를 이동시키기 위하여 전하에 가해야 할 힘 : $F_{appl} = -F_{EL} = -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_L$

→ 전하를 이동시키는데 필요한 에너지(일=힘×거리) : $dW = -Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$

$$\rightarrow \therefore W = \int_{init}^{final} dW = -Q \int_{init}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad [J, \text{joule}]$$

4.1 전계내에서 점전하를 이동시키는데 소요되는 에너지

$$W = \int_{\text{init}}^{\text{final}} dW = -Q \int_{\text{init}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

여기서, $d\mathbf{L} = \mathbf{a}_L dL$

$$= dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z \text{ (직각좌표계)}$$

$$= d\rho\mathbf{a}_\rho + \rho d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z \text{ (원통좌표계)}$$

$$= dr\mathbf{a}_r + rd\theta\mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi\mathbf{a}_\phi \text{ (구좌표계)}$$

4.1 전계내에서 점전하를 이동시키는데 소요되는 에너지

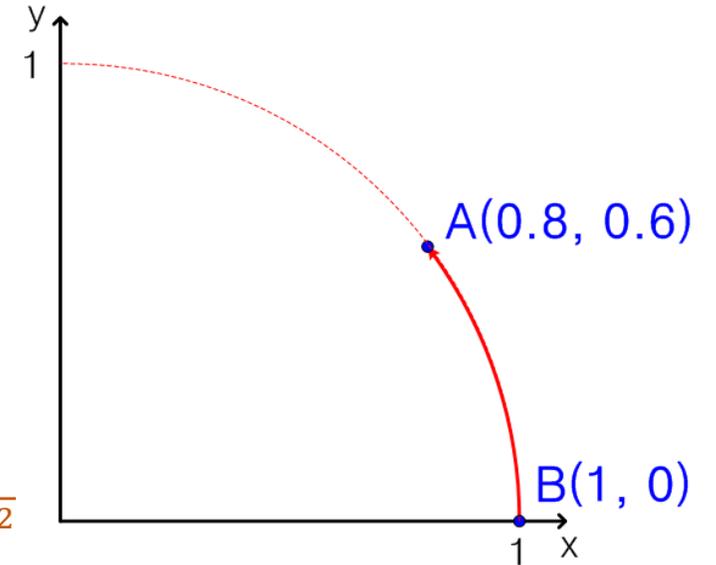
- (ex 1) $\mathbf{E} = \left(\frac{x}{2} + 2y\right) \mathbf{a}_x + 2x\mathbf{a}_y$ [V/m]에 점전하 $Q = -20[\mu\text{C}]$ 가 위치, 전하 Q 를 점 $O(0,0,0)$ 에서 점 $P(4,0,0)$ 까지 이동시키는데 필요한 일 $W = ?$

$$\begin{aligned} W &= -Q \int_{\text{init}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &= 20 \times 10^{-6} \int_0^P \left[\left(\frac{x}{2} + 2y\right) \mathbf{a}_x + 2x\mathbf{a}_y \right] \cdot [dx\mathbf{a}_x] \\ &= 20 \times 10^{-6} \int_0^4 \left(\frac{x}{2} + 2y\right) dx \Big|_{y=0} \\ &= 20 \times 10^{-6} \cdot \left[\frac{x^2}{4} + 0 \right]_{x=0}^{x=4} \\ &= 80 [\mu\text{J}] \end{aligned}$$

4.2 선적분

- (예제 4.1) $\mathbf{E} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ [V/m]에 점전하 $Q = 2C$ 가 위치, 전하 Q 를 점 $B(1,0,1)$ 에서 점 $A(0.8,0.6,1)$ 까지 $x^2 + y^2 = 1, z = 1$ 인 원의 원호를 따라 이동시키는데 필요한 일 $W = ?$

$$\begin{aligned}W &= -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\&= -2 \int_B^A (y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z) \cdot (dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z) \\&= -2 \int_B^A (ydx + xdy + 2dz) \\&= -2 \left(\int_1^{0.8} y dx + \int_0^{0.6} x dy + \int_1^1 2 dz \right) \quad \leftarrow y = \sqrt{1-x^2}, x = \sqrt{1-y^2} \\&= -2 \left(\int_1^{0.8} \sqrt{1-x^2} dx + \int_0^{0.6} \sqrt{1-y^2} dy + 0 \right)\end{aligned}$$



4.2 선적분

$$W = -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$= -2 \left(\int_1^{0.8} \sqrt{1-x^2} dx + \int_0^{0.6} \sqrt{1-y^2} dy + 0 \right)$$

$$\leftarrow \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= - \left[x \sqrt{1-x^2} - \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right]_1^{0.8} - \left[y \sqrt{1-y^2} - \tan^{-1} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \right]_0^{0.6}$$

$$= - \left[\left(0.8 \times \frac{3}{5} + 0.927 \right) - (0 + 1.571) \right] - \left[\left(0.6 \times \frac{4}{5} + 0.644 \right) - (0 + 0) \right]$$

$$= -0.96 \text{ [J]}$$

4.2 선적분

- (예제 4.2) $\mathbf{E} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ [V/m] 에 점전하 $Q = 2$ [C]가 위치, 전하 Q 를 점 $B(1,0,1)$ 에서 점 $A(0.8,0.6,1)$ 까지 직선을 따라 이동시키는데 필요한 일 $W = ?$

❖ 점 $A(0.8,0.6)$ 와 점 $B(1,0)$ 를 잇는 직선의 방정식

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

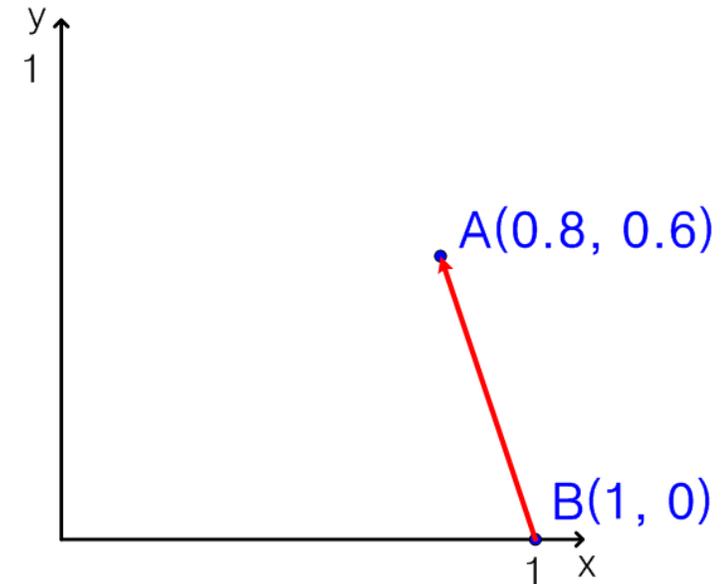
$$y - 0 = \frac{0.6 - 0}{0.8 - 1} (x - 1)$$

$$y = -3(x - 1)$$

$$W = -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$= -2 \int_B^A (y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z) \cdot (dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z) = -2 \int_B^A (ydx + xdy + 2dz)$$

$$= -2 \left(\int_1^{0.8} y dx + \int_0^{0.6} x dy + \int_1^1 2 dz \right)$$



4.2 선적분

$$\begin{aligned}W &= -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\&= -2 \left(\int_1^{0.8} y dx + \int_0^{0.6} x dy + \int_1^1 2 dz \right) \\&\quad \leftarrow y = -3x + 3, x = -\frac{1}{3}y + 1 \\&= -2 \left(\int_1^{0.8} (-3x + 3) dx + \int_0^{0.6} \left(-\frac{1}{3}y + 1\right) dy + 0 \right) \\&= -2 \left(\left[-\frac{3}{2}x^2 + 3x \right]_1^{0.8} + \left[-\frac{1}{6}y^2 + y \right]_0^{0.6} \right) \\&= -2([1.44 - 1.5] + [0.54 - 0]) \\&= -0.96[J]\end{aligned}$$

4.2 선적분

- (ex 2) z 축을 따라 선전하 ρ_L , 전하 Q 가 반지름 ρ_1 인 원을 따라 일주하는데 필요한 일 $W = ?$

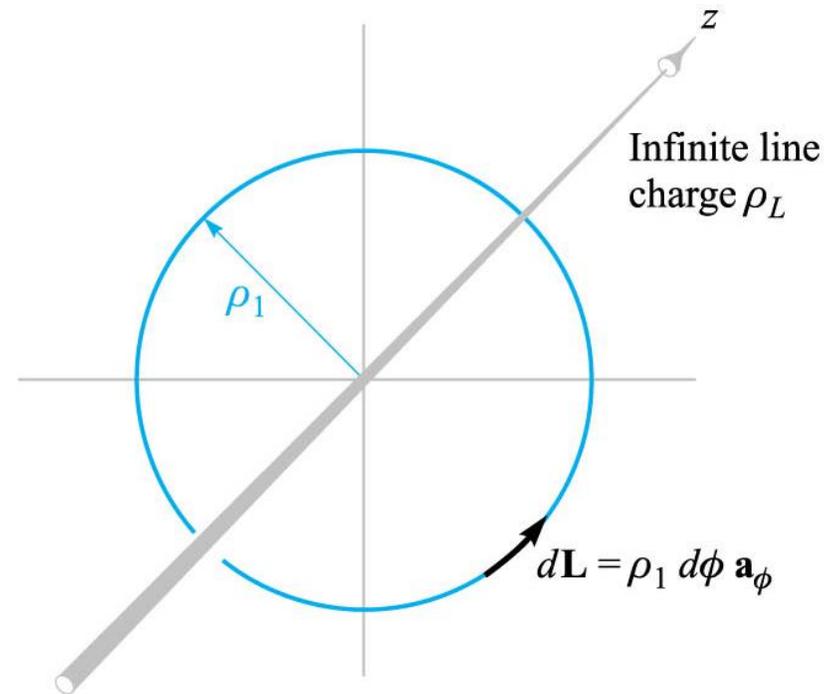
▶ 선전하 ρ_L 에 의한 전기

$$\mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho$$

$$W = -Q \int_{\text{init}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$= -Q \int_B \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho \cdot (d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z)$$

$$= -Q \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} d\phi \mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$$



4.2 선적분

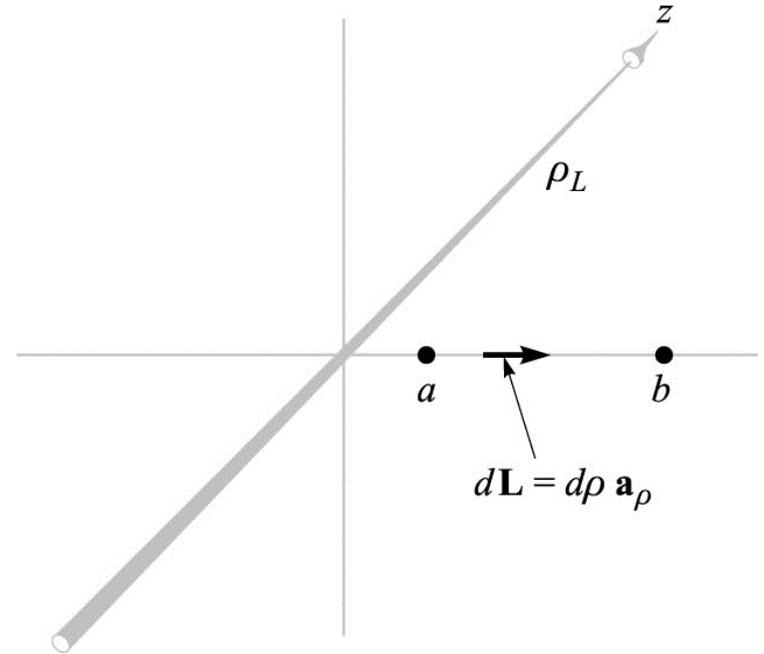
- (ex 3) z 축을 따라 선전하 ρ_L , 전하 Q ; $B(\rho = a, \phi = 0, z = 0) \rightarrow A(\rho = b, \phi = 0, z = 0)$, $W = ?$

$$W = -Q \int_{init}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$= -Q \int_B^A \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho \cdot (d\rho\mathbf{a}_\rho + \rho d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z)$$

$$= -Q \int_a^b \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} d\rho$$

$$= -Q \left[\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho \right]_a^b = -\frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} [\ln b - \ln a] = -\frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \text{ [J]}$$



4.2 선적분

- (ex 4) z 축을 따라 선전하 ρ_L , 전하 Q ; $B(\rho = b, \phi = 0, z = 0) \rightarrow A(\rho = a, \phi = 0, z = 0)$, $W = ?$

$$\begin{aligned}W &= -Q \int_{init}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\&= -Q \int_B^A \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho \cdot (d\rho\mathbf{a}_\rho + \rho d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z) \\&= -Q \int_b^a \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} d\rho \\&= -Q \left[\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho \right]_b^a = -\frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} [\ln a - \ln b] \\&= -\frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{b} \quad \text{or} \quad \frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \quad [J]\end{aligned}$$

4.3 전위차 및 전위의 정의

- 전위차 (Potential difference)

- 단위시험전하를 점 B 에서 점 A 까지 이동시키는데 필요한 일

- 전위차 V_{AB}

$$V_{AB} = \frac{W}{Q} = - \int_{\text{init}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$
$$= - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad [\text{V, volt}] = [\text{J/C, joule/coulomb}]$$

- 전위(potential) 또는 절대전위; 전위가 영인 기준점에 대한 특정 점의 전위차

- 점 B 에 대한 점 A 의 전위차; $V_{AB} = V_A - V_B$

4.3 전위차 및 전위의 정의

- (ex 5) z 축을 따라 선전하 ρ_L , 점 $B(\rho = b, 0, 0)$ 에 대한 점 $A(\rho = a, 0, 0)$ 의 전위차 $V_{ab} = ?$
 - 선전하 ρ_L 에 의한 전기계

$$\mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho$$

$$V_{ab} = - \int_{init}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$= - \int_B^A \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho \cdot (d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z) = - \int_b^a \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} d\rho$$

$$= - \left[\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho \right]_b^a = - \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} [\ln a - \ln b]$$

$$= - \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{b} \quad \text{or} \quad \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \quad [\text{V}]$$

4.3 전위차 및 전위의 정의

- (ex 6) 원점에 점전하 Q , 점 $B(r = r_B, 0, 0)$ 와 점 $A(r = r_A, 0, 0)$ 의 전위차 $V_{AB} = ?$

▶ 점전하 Q 에 의한 전기장

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

$$V_{AB} = - \int_{init}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$= - \int_B^A \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \cdot (dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi)$$

$$= - \int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_B}^{r_A}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B} = V_A - V_B$$

4.3 전위차 및 전위의 정의

- (ex 7) $\mathbf{E} = -\frac{6y}{x^2}\mathbf{a}_x + \frac{6}{x}\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$ [V/m]

➤ (a) 점 $P(-7,2,1)$ 와 점 $Q(4,1,2)$ 사이의 전위차 $V_{PQ} = ?$

경로; $Q(4,1,2) \rightarrow R_1(-7,1,2) \rightarrow R_2(-7,2,2) \rightarrow P(-7,2,1)$

$$\begin{aligned} V_{PQ} &= - \int_{init}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &= - \int_Q^P \left(-\frac{6y}{x^2}\mathbf{a}_x + \frac{6}{x}\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z \right) \cdot (dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z) \\ &= - \left(\int_Q^{R_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_{R_2}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \right) \end{aligned}$$

4.3 전위차 및 전위의 정의

$$\begin{aligned}V_{PQ} &= -\left(\int_Q^{R_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_{R_2}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}\right) \\&= -\int_4^{-7} \left(-\frac{6y}{x^2}\right) dx \Big|_{y=1} - \int_1^2 \frac{6}{x} dy \Big|_{x=-7} - \int_2^1 5 dz \\&= \int_4^{-7} \frac{6}{x^2} dx + \int_1^2 \frac{6}{7} dy - \int_2^1 5 dz \\&= 6 \left[-\frac{1}{x}\right]_4^{-7} + \frac{6}{7} [y]_1^2 - 5[z]_2^1 \\&= 6 \left[\frac{1}{7} + \frac{1}{4}\right] + \frac{6}{7} [2 - 1] - 5[1 - 2] = 8.214 \text{ [V]}\end{aligned}$$

4.3 전위차 및 전위의 정의

➤ (b) $V_Q = 0 \rightarrow V_P = ?$

$$V_{PQ} = V_P - V_Q$$

$$\therefore V_P = V_Q + V_{PQ}$$

$$= 0 + 8.214 = 8.214 \text{ [V]}$$

➤ (c) $V_R = 0$ where $R(2,0,-1) \rightarrow V_P = ?$ where $P(-7,2,1)$

경로; $R(2,0,-1) \rightarrow T_1(-7,0,-1) \rightarrow T_2(-7,2,-1) \rightarrow P(-7,2,1)$

$$V_P = V_R + V_{PR}$$

$$= V_{PR} = - \int_{init}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$= - \int_R^P \left(-\frac{6y}{x^2} \mathbf{a}_x + \frac{6}{x} \mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z \right) \cdot (dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z)$$

4.3 전위차 및 전위의 정의

$$\begin{aligned}V_P &= V_R + V_{PR} = V_{PR} = - \int_{\text{init}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_R^P \left(-\frac{6y}{x^2} \mathbf{a}_x + \frac{6}{x} \mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z \right) \cdot (dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z) \\&= - \left(\int_R^{T_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_{T_2}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \right) \\&= - \int_2^{-7} \left(-\frac{6y}{x^2} \right) dx \Big|_{y=0} - \int_0^2 \frac{6}{x} dy \Big|_{x=-7} - \int_{-1}^1 5 dz \\&= \int_0^2 \frac{6}{7} dy - \int_{-1}^1 5 dz \\&= \frac{6}{7} [y]_0^2 - 5[z]_{-1}^1 \\&= \frac{6}{7} [2 - 0] - 5[1 + 1] = -8.286 \text{ [V]}\end{aligned}$$

4.4 점전하에 의한 전위

- 점전하 Q 에 의한 전기

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \text{ [V/m]}$$

- 원점에 점전하 Q 가 위치할 때, $r = r_A$ 인 점과 $r = r_B$ 인 점 사이의 전위차 V_{AB}

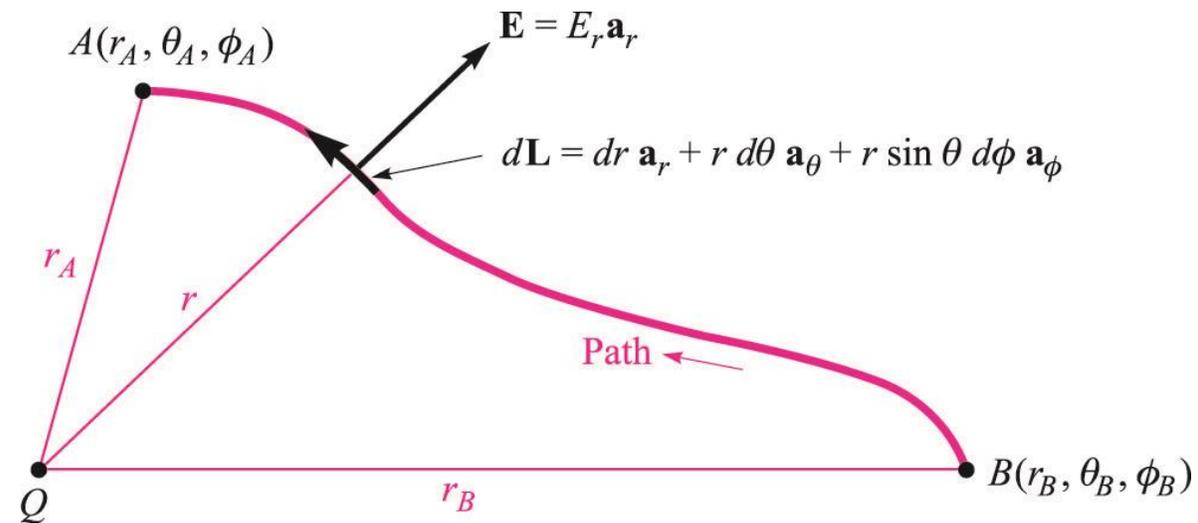
$$V_{AB} = - \int_{init}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$= - \int_B^A \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \cdot (dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi)$$

$$= - \int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr$$

$$= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_B}^{r_A}$$

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] \text{ [V]}$$



4.4 점전하에 의한 전위

- 점전하 Q 가 원점에 위치할 때, $r = \infty$ 인 곳을 영전위 기준점으로 정할 경우 점 A 에서의 전위 V_A

$$V_A = V_{A\infty} - V_\infty$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{\infty} \right) + 0$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \text{ [V]}$$

물리적 의미 : 1C의 전하를 무한원점으로부터 r 만큼 떨어진 점까지 이동하기 위해서 해 주어야 하는 일

- 점전하 Q 가 원점에 위치할 때, 원점에서의 거리가 r 인 곳에서의 전위 V

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ [V]}$$

4.4 점전하에 의한 전위

- (ex 8) $Q = 6nC$ at $O(0,0,0)$, $V_P = ?$, where $P(0.2, -0.4, 0.4)$

➤ (a) $V_\infty = 0$,

$$\begin{aligned} V_P &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \frac{6 \times 10^{-9}}{4\pi \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \times \sqrt{0.2^2 + (-0.4)^2 + 0.4^2}} \\ &= \frac{54}{\sqrt{0.36}} = 90 \text{ [V]} \end{aligned}$$

4.4 점전하에 의한 전위

➤ (b) $V_Q = 0$, where $Q(1,0,0)$

$$\begin{aligned}V_P &= V_{PQ} + V_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q} \right) + 0 \\ &= \frac{6 \times 10^{-9}}{4\pi \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}} \left(\frac{1}{0.36} - 1 \right) = 36 \text{ [V]}\end{aligned}$$

➤ (c) $V_R = 20$, where $R(-0.5,1,-1)$

$$\begin{aligned}V_P &= V_{PR} + V_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_R} \right) + 20 \\ &= \frac{6 \times 10^{-9}}{4\pi \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}} \left(\frac{1}{0.6} - \frac{1}{\sqrt{(-0.5)^2 + 1^2 + (-1)^2}} \right) + 20 \\ &= 54 \left(\frac{1}{0.6} - \frac{1}{1.5} \right) + 20 = 74 \text{ [V]}\end{aligned}$$

4.5 전하 시스템의 전위계: 보전적 성질

- 점의 위치 \mathbf{r}_1 에 놓여진 점전하 Q_1 에 의한 \mathbf{r} 위치에서의 전위

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}$$

- 점의 위치 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 에 놓여진 점전하 Q_1, Q_2 에 의한 \mathbf{r} 위치에서의 전위

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}$$

- n 개의 점전하에 의한 경우

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} \quad \Rightarrow \quad V(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^n \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|}$$

- 임의의 전하분포에 따른 전위

$$V(\mathbf{r}) = \int_{vol} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')dv'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

4.5 전하 시스템의 전위계: 보존적 성질

- 전위차;

$$V_{AB} = V_A - V_B = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

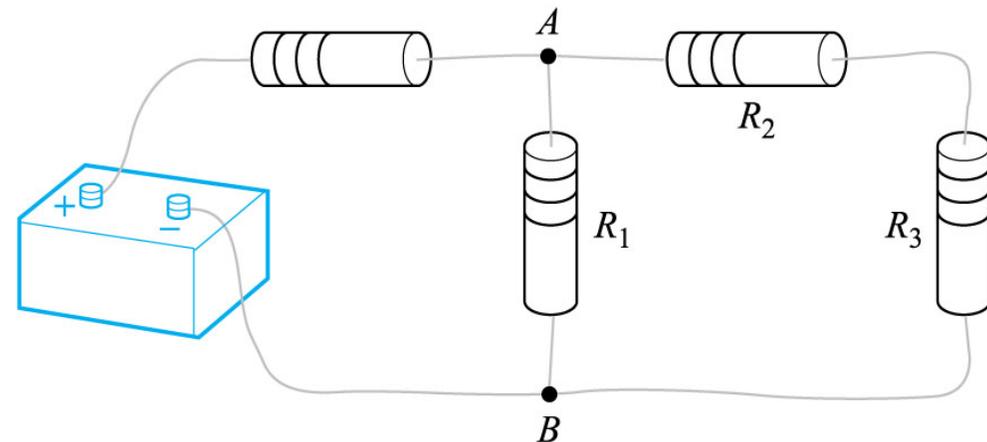
- ▶ 무한원점을 영전위 기준점으로 할 경우

$$V_A = - \int_{\infty}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

- 보존계(conservative field); 폐곡선에 대한 선적분이 0

- ▶ $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \rightarrow$ 이동경로와는 무관

\rightarrow Kirchhoff의 전압법칙



4.5 전하 시스템의 전위계: 보존적 성질

- (ex 9) $V_\infty = 0, V_P = ?$, where $P(0,0,10)$

➤ (a) $Q = 20$ [nC] at $O(0,0,0)$

$$V_P = V_{P\infty} + V_\infty$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$= \frac{20 \times 10^{-9}}{4\pi \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \times 10} = 18 \text{ [V]}$$

4.5 전하 시스템의 전위계: 보존적 성질

- (b) $\rho_L = 10 \text{ [nC/m]}$ at $x = 0, z = 0, -1 < y < 1$

$$\begin{aligned} V &= \int_{vol} \frac{\rho_v(\mathbf{r}') dv'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int_l \frac{\rho_L(\mathbf{r}') dl'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{\rho_L dy'}{4\pi\epsilon_0 |10\mathbf{a}_z - y'\mathbf{a}_y|} \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{\rho_L dy'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{10^2 + y'^2}} \quad \leftarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \\ &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln \left(y' + \sqrt{10^2 + y'^2} \right) \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{10 \times 10^{-9}}{4\pi \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}} \left[\ln(1 + \sqrt{101}) - \ln(-1 + \sqrt{101}) \right] \\ &= 10 \times 9 \times \ln \frac{\sqrt{101} + 1}{\sqrt{101} - 1} = 17.97 \text{ [V]} \end{aligned}$$

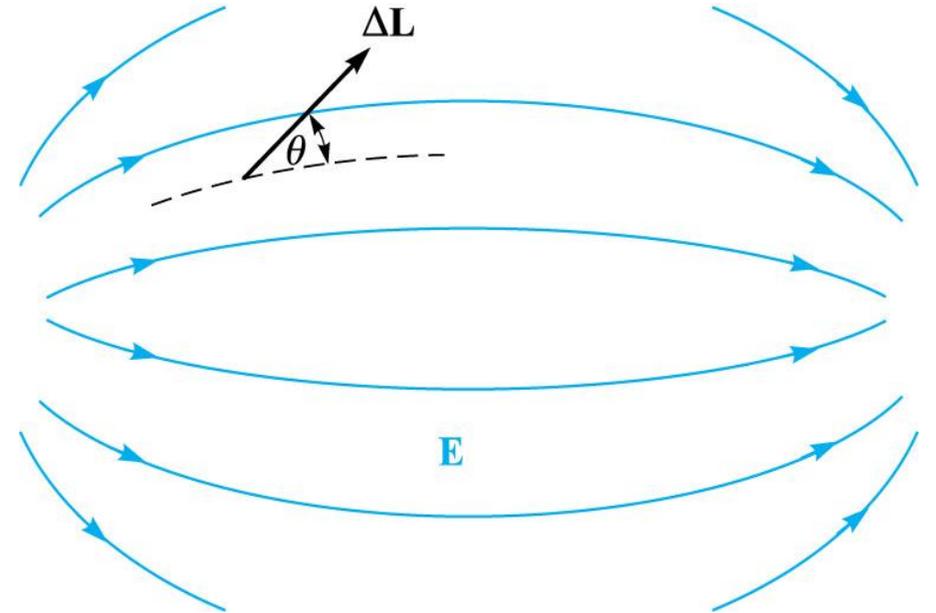
4.6 전위 경도

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \Rightarrow \Delta V \doteq -\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{L} \quad (\text{일정한 } \mathbf{E})$$

$$\begin{aligned}\Delta V &\doteq -\mathbf{E} \cdot (\Delta\mathbf{L} \cdot \mathbf{a}_L) \\ &= -E\Delta L \cos \theta\end{aligned}$$

$$\frac{dV}{dL} = -E \cos \theta$$

$$\left. \frac{dV}{dL} \right|_{\max} = E \quad (\cos \theta = -1, \Delta\mathbf{L} \text{의 방향과 } \mathbf{E} \text{의 방향이 반대인 경우})$$



- 1) 세기의 크기는 거리에 대한 전위의 변화율의 최대값과 같다.
- 2) 전위의 변화율의 최대값은 \mathbf{E} 의 방향이 전위가 증가하는 방향과 반대일 때 얻어진다.

4.6 전위 경도

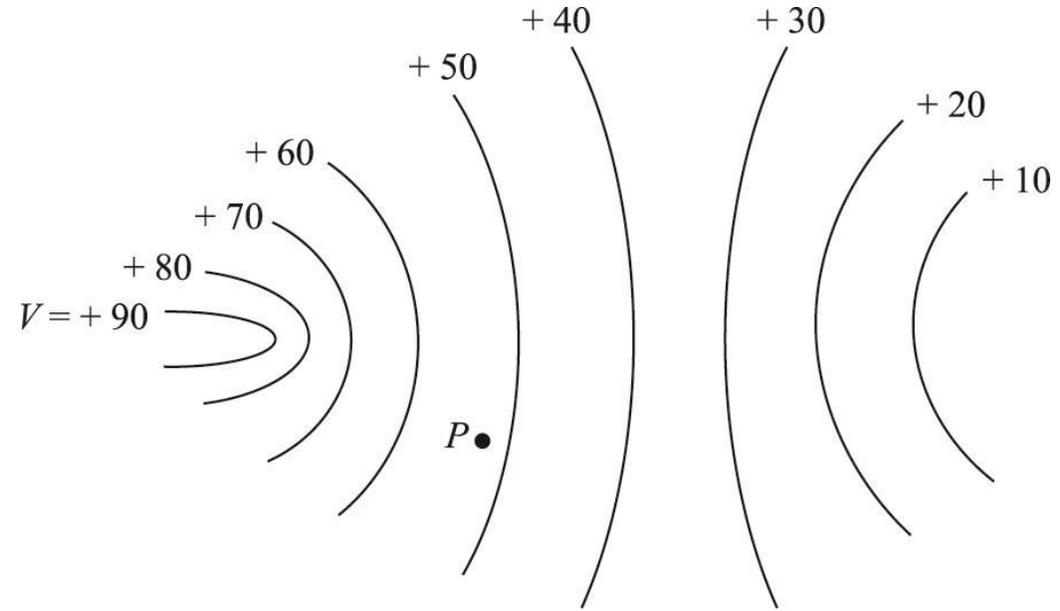
$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \Rightarrow \Delta V \doteq -\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{L} \quad (\text{일정한 } \mathbf{E})$$

$$\Delta V \doteq -\mathbf{E} \cdot (\Delta\mathbf{L} \cdot \mathbf{a}_L) = -E\Delta L \cos \theta$$

$$\frac{dV}{dL} = -E \cos \theta \Rightarrow \left. \frac{dV}{dL} \right|_{\max} = E \quad (\cos \theta = -1,)$$



$$\mathbf{E} = -\left. \frac{dV}{dL} \right|_{\max} \mathbf{a}_N = -\frac{dV}{dN} \mathbf{a}_N$$



ΔV 가 일정한 선을 연결한 결과 : 등전위면

\mathbf{E} 의 크기는 V 의 공간 내의 최대변화율과 같고, \mathbf{E} 의 방향은 등전위면과 수직으로 전위가 감소하는 방향과 같다.

4.6 전위 경도

- 경도(Gradient)

➤ 일반적으로 스칼라 T 로부터 벡터 기울기를 얻는 연산을 경도 또는 경도 또는 구배(gradient)라 부르고, 다음과 같이 정의한다.

$$T\text{의구배} = \text{grad } T = \frac{dT}{dN} \mathbf{a}_N$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

$$\rightarrow E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\therefore \mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z\right) V = -\nabla V = -\text{grad } V$$

4.6 전위 경도

- 전위경도의 계산

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \text{ (직각좌표계)}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_x + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \text{ (원통좌표계)}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_x + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_y + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_z \text{ (구좌표계)}$$

- 발산(divergence) : 벡터 \rightarrow 스칼라
- 경도 (gradient) : 스칼라 \rightarrow 벡터

4.6 전위 경도

- (ex 7) $V = 2x^2y - 5z$

- (a) $V = ?$ at $P(-4,3,6)$

$$V_P = 2(-4)^2(3) - 5(6) = 66 \text{ [V]}$$

- (b) 전계의 세기 \mathbf{E} 의 크기와 방향 at $P(-4,3,6)$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right) = -4xy\mathbf{a}_x - 2x^2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z \text{ [V/m]}$$

$$\mathbf{E}_P = 48\mathbf{a}_x - 32\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z \text{ [V/m]}$$

$$|\mathbf{E}_P| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{48^2 + (-32)^2 + 5^2} = 57.9 \text{ [V/m]}$$

$$\mathbf{a}_{E,P} = \frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|} = \frac{48\mathbf{a}_x - 32\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z}{57.9} = 0.829\mathbf{a}_x - 0.553\mathbf{a}_y + 0.086\mathbf{a}_z$$

4.6 전위 경도

- (ex 7) $V = 2x^2y - 5z$

➤ (c) 자유공간에서의 전속밀도 \mathbf{D}

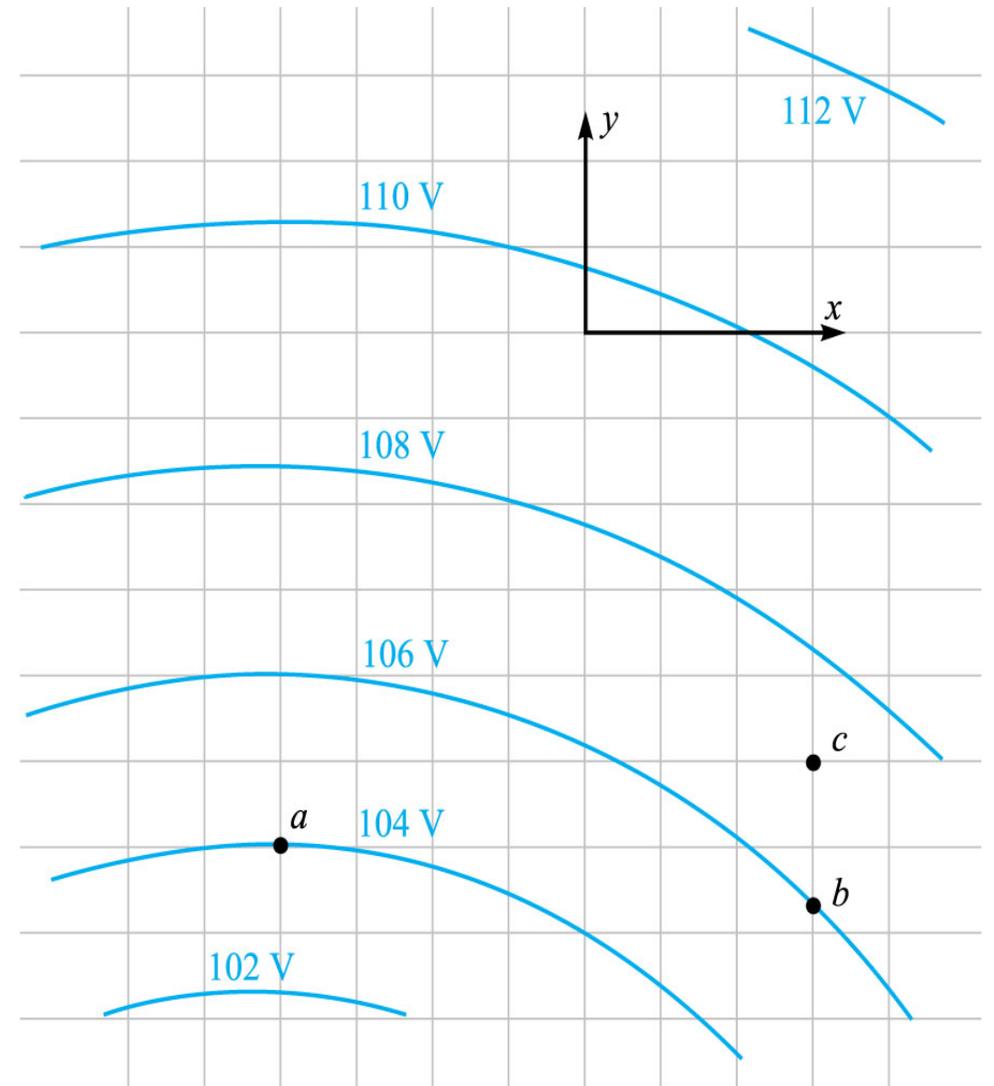
$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} = (8.854 \times 10^{-12}) \cdot (-4xy\mathbf{a}_x - 2x^2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z) \\ &= -35.4xy\mathbf{a}_x - 17.71x^2\mathbf{a}_y + 44.3\mathbf{a}_z \text{ [pC/m}^2\text{]}\end{aligned}$$

➤ (d) 전계를 만들어 낸 원인(체적전하밀도)

$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = -35.4y \text{ [pC/m}^3\text{]}$$

4.6 전위 경도

- (ex 14) 101쪽 응용예제 4.7
 - V at a, b, c



4.6 전위 경도

- (ex 15) 101쪽 예제 4.8

$$V = \frac{(60 \sin \theta)}{r^2} [V], \quad P(r = 3m, \theta = 60^\circ, \phi = 25^\circ)$$

$$(a) V_P = \frac{60 \sin 60^\circ}{3^2} = 5.773 [V]$$

$$(b) \mathbf{E}_P = -\nabla V \Big|_P = - \left(\frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_x + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_y + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_z \right) \Big|_P = - \left((-2) \cdot \frac{60 \sin \theta}{r^3} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{60 \cos \theta}{r^2} \mathbf{a}_\theta \right) \Big|_P$$
$$= \frac{2 \times 60 \sin 60^\circ}{3^3} \mathbf{a}_r - \frac{60 \cos 60^\circ}{3^3} \mathbf{a}_\theta = 3.85 \mathbf{a}_r - 1.11 \mathbf{a}_\theta [V/m]$$

$$(c) \frac{dV}{dN} \text{ at } P$$

$$\frac{dV}{dN} \Big|_P = |\mathbf{E}_P| = \sqrt{3.85^2 + (-1.11)^2} = 4.006 [V/m]$$

4.6 전위 경도

➤ (d) 점 P 에서 \mathbf{a}_N

$$\mathbf{a}_{N,P} = -\mathbf{a}_{E,P} = -\frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|}\bigg|_P = -\frac{3.85\mathbf{a}_r - 1.11\mathbf{a}_\theta}{4.01} = -0.96\mathbf{a}_r + 0.277\mathbf{a}_\theta$$

➤ (e) 점 P 에서 ρ_v

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} = 120\varepsilon_0 \frac{\sin \theta}{r^3} \mathbf{a}_r - 60\varepsilon_0 \frac{\cos \theta}{r^3} \mathbf{a}_\theta$$

$$\begin{aligned}\rho_v\bigg|_P &= \nabla \cdot \mathbf{D}\bigg|_P = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}\bigg|_P \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{120\varepsilon_0 \sin \theta}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{-60\varepsilon_0 \sin \theta \cos \theta}{r^3}\bigg|_P = -\frac{120\varepsilon_0 \sin \theta}{r^4} - \frac{60\varepsilon_0}{r^4 \sin \theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\bigg|_P \\ &= -\frac{60\varepsilon_0}{r^4} \left[2 \sin \theta + \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta} \right]\bigg|_P = -\frac{60 \times 8.854 \times 10^{-12}}{3^4} \left[2 \times \sin 60^\circ - \frac{\cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ}{\sin 60^\circ} \right] \\ &= -7.57 [\text{pC}/\text{m}^3]\end{aligned}$$

4.7 전기쌍극자

- 전기쌍극자(electric dipole)

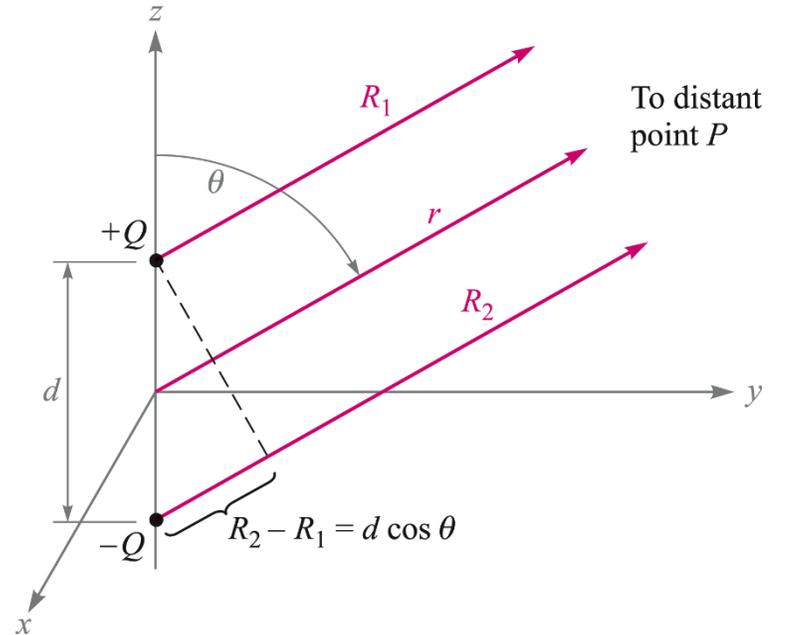
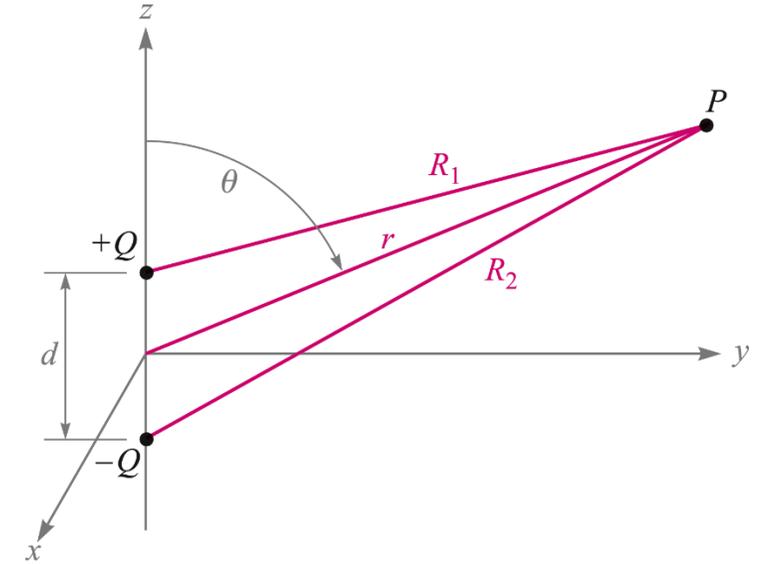
- 전계 및 전위계를 구하고자 하는 점 P 까지의 거리에 비해 적은 거리로 서로 떨어져 있는 크기가 같고 부호가 반대인 두 점전하가 하나의 입자처럼 행동

$$V = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

- 멀리 떨어져 있는 점에서

$$R_1 R_2 \cong r^2 \quad \text{and} \quad R_2 - R_1 \cong d \cos \theta$$

$$V = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



4.8 정전계 내의 에너지밀도

- 한 양전하를 무한원점으로부터 다른 양전하의 전계 내로 가져오기 위해서는 외부로부터 일을 해주어야 한다.
- 한 전하계 내에 있는 위치에너지를 구하기 위해서는 전하들을 그 위치까지 가져오는데 외부로부터 해 주어야 할 일을 구한다.
 - Q_2 를 가져오는 데 사용하는 일 = $Q_2 V_{2,1}$
 - Q_3 를 가져오는 데 사용하는 일 = $Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2}$
 - Q_4 를 가져오는 데 사용하는 일 = $Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3}$
 - $W_E = Q_2 V_{2,1} + Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} + Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3} + \dots$
 - $W_E = Q_1 V_{1,2} + Q_1 V_{1,3} + Q_2 V_{2,3} + Q_1 V_{1,4} + Q_2 V_{2,4} + Q_3 V_{3,4} + \dots$

$$\begin{aligned} Q_3 V_{3,1} &= Q_3 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} \\ &= Q_1 \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{31}} = Q_1 V_{1,3} \end{aligned}$$

4.8 정전계 내의 에너지밀도

$$W_E = Q_2 V_{2,1} + Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} + Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3} + \dots$$

$$W_E = Q_1 V_{1,2} + Q_1 V_{1,3} + Q_2 V_{2,3} + Q_1 V_{1,4} + Q_2 V_{2,4} + Q_3 V_{3,4} + \dots$$

$$2W_E = Q_1(V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots) + Q_2(V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \dots) + Q_3(V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \dots) + \dots$$

$$W_E = \frac{1}{2}(Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N Q_m V_m = \frac{1}{2} \int_{vol} \rho_v V dV$$

$$= \frac{1}{2} \int_{vol} (\nabla \cdot \mathbf{D}) V dV = \frac{1}{2} \int_{vol} [\nabla \cdot (V\mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot (\nabla V)] dV$$

$$= \frac{1}{2} \oint_S (V\mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{2} \int_{vol} \mathbf{D} \cdot (\nabla V) dv$$

$$= 0 - \frac{1}{2} \int_{vol} \mathbf{D} \cdot (-\mathbf{E}) dv = \frac{1}{2} \int_{vol} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv$$

$$Q_3 V_{3,1} = Q_3 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} = Q_1 \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{31}} = Q_1 V_{1,3}$$

$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (V\mathbf{D}) \\ \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla V) \end{aligned}$$

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{vol} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \int_{vol} \epsilon_0 E^2 dv$$

4.8 정전계 내의 에너지밀도

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{vol} \rho_v V dv = \frac{1}{2} \int_{vol} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \int_{vol} \epsilon_0 E^2 dv$$

✓

- (ex 13) $W_E = ?$ in $0 < \rho < a, 0 < \phi < \pi, 0 < z < 2$

➤ (a) $V = V_0 \frac{\rho}{a}$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) = -\frac{V_0}{a} \mathbf{a}_\rho$$

$$\therefore W_E = \frac{1}{2} \int_{vol} \epsilon_0 E^2 dv = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^a \epsilon_0 \frac{V_0^2}{a^2} \rho d\rho d\phi dz = \frac{\epsilon_0 V_0^2}{2 a^2} \times 2 \times \pi \times \left. \frac{1}{2} \rho^2 \right|_0^a = \frac{\pi}{2} \epsilon_0 V_0^2 [J]$$