전기자기학 I   1차시험 풀이

시험일시 : 2023년 4월 20일

* 다음의 문제를 정확하게 읽고 풀이과정과 답을 쓰시오. 100점이 넘는 경우 100점으로 처리함.

[Q.1] 세 점 $A(6,-1,2)$, $B(-2,3,-4)$, $C(-3,1,5)$에 대하여 다음을 구하라. (40점)

[A.1(a)] 점 A에서 점 B로의 벡터 $\mathbf{R}_{AB}$

$$\mathbf{R}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = -8\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z$$

[A.1(b)] 점 A에서 점 C로의 벡터 $\mathbf{R}_{AC}$

$$\mathbf{R}_{AC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A = -9\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$$

[A.1(c)] $\mathbf{R}_{AB}$를 $\mathbf{R}_{AC}$에 투영한 스칼라 투영

$$\frac{\mathbf{R}_{AB}\cdot\mathbf{R}_{AC}}{|\mathbf{R}_{AC}|} = \frac{(-8)\times(-9)+4\times 2+(-6)\times 3}{\sqrt{(-9)^2+2^2+3^2}} = 6.4$$

[A.1(d)] $\mathbf{R}_{AB}\times\mathbf{R}_{AC}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{AB}\times\mathbf{R}_{AC} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ -8 & 4 & -6 \\ -9 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= \{4\times 3-(-6)\times 2\}\mathbf{a}_x + \{(-6)\times(-9)-(-8)\times 3\}\mathbf{a}_y + \{(-8)\times 2-4\times(-9)\}\mathbf{a}_z \\
&= 24\mathbf{a}_x + 78\mathbf{a}_y + 20\mathbf{a}_z
\end{aligned}$$

[Q.2] 벡터장 $\mathbf{F} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y$가 주어져 있다. 만약, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G} = 2xy$이고 $\mathbf{F}\times\mathbf{G} = (x^2-y^2)\mathbf{a}_z$이면, $\mathbf{G}$를 구하라. (15점)

$\mathbf{G} = g_x\mathbf{a}_x + g_y\mathbf{a}_y + g_z\mathbf{a}_z$라고 놓으면, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G} = g_x x + g_y y = 2xy$이고,

$$\mathbf{F}\times\mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ x & y & 0 \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} = g_z y\mathbf{a}_x - xg_z\mathbf{a}_y + (xg_y - yg_x)\mathbf{a}_z = (x^2-y^2)\mathbf{a}_z$$

따라서 식을 만족하려면 $g_z = 0$, $g_x = y$, $g_y = x$가 된다. $\Rightarrow \mathbf{G} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y$

[Q.3] 다음 좌표계 문제에 대해서 답하시오. (45점)

[A.3(a)] 점 $P(10,-8,6)$ 에서 $\mathbf{F} = 10\mathbf{a}_x - 8\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z$ 를 원통좌표계로 변환

점 P를 원통좌표계로 표시하면

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{10^2+8^2} = 12.8 \\
\phi &= \tan^{-2}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{-8}{10} = -38.7^\circ
\end{aligned}$$

$$\mathbf{F} = F_\rho\mathbf{a}_\rho + F_\phi\mathbf{a}_\phi + F_z\mathbf{a}_z$$

여기서 F_z는 두 좌표계에서 동일하며,

$$
\begin{aligned}
F_\rho = \mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_\rho &= (10\mathbf{a}_x - 8\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z)\cdot\mathbf{a}_\rho \\
&= 10\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\rho - 8\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\rho + 6\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{a}_\rho \\
&= 10\cos\phi - 8\sin\phi + 0 \\
&= 10\cos(-38.7) - 8\sin(-38.7) = 12.81
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_\phi = \mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_\phi &= (10\mathbf{a}_x - 8\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z)\cdot\mathbf{a}_\phi \\
&= 10\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\phi - 8\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\phi + 6\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{a}_\phi \\
&= -10\sin\phi + 8\cos\phi + 0 \\
&= -10\sin(-38.7) - 8\cos(-38.7) = 0.009 \approx 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = 12.81\mathbf{a}_\rho + 6\mathbf{a}_z$$

[A.3(b)] 점 $Q(\rho,\phi,z)$ 에서 $\mathbf{G} = (2x+y)10\mathbf{a}_x - (y-4x)\mathbf{a}_y$ 를 원통좌표계로 변환

$$\mathbf{G} = G_\rho\mathbf{a}_\rho + G_\phi\mathbf{a}_\phi + G_z\mathbf{a}_z$$

여기서 G_z는 두 좌표계에서 동일하므로 $G_z = 0$이며,

$$
\begin{aligned}
G_\rho = \mathbf{G}\cdot\mathbf{a}_\rho &= [(2x+y)10\mathbf{a}_x - (y-4x)\mathbf{a}_y]\cdot\mathbf{a}_\rho \\
&= (2x+y)10\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\rho - (y-4x)\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\rho
\end{aligned}
$$

에서 직교좌표계 단위인 x, y, z를 원통좌표계로 변경하려면 $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$를 대입하면 된다.

$$
\begin{aligned}
G_\rho &= (2\rho\cos\phi + \rho\sin\phi)10\cos\phi - (\rho\sin\phi - 4\rho\cos\phi)\sin\phi \\
&= 20\rho\cos^2\phi + 10\rho\sin\phi\cos\phi - \rho\sin^2\phi + 4\rho\sin\phi\cos\phi \\
&= 20\rho\cos^2\phi - \rho\sin^2\phi + 14\rho\sin\phi\cos\phi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_\phi = \mathbf{G}\cdot\mathbf{a}_\phi &= [(2x+y)10\mathbf{a}_x - (y-4x)\mathbf{a}_y]\cdot\mathbf{a}_\phi \\
&= (2x+y)10\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\phi - (y-4x)\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\phi \\
&= -(2\rho\cos\phi + \rho\sin\phi)10\sin\phi - (\rho\sin\phi - 4\rho\cos\phi)\cos\phi \\
&= -20\rho\cos\phi\sin\phi - 10\rho\sin^2\phi - \rho\sin\phi\cos\phi + 4\rho\cos^2\phi \\
&= 4\rho\cos^2\phi - 10\rho\sin^2\phi - 21\rho\cos\phi\sin\phi
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \mathbf{G} = (20\rho\cos^2\phi - \rho\sin^2\phi + 14\rho\sin\phi\cos\phi)\mathbf{a}_\rho + (4\rho\cos^2\phi - 10\rho\sin^2\phi - 21\rho\cos\phi\sin\phi)\mathbf{a}_z$$

[A.3(c)] 두 점 $C(-3,2,1)$, $D(r=5,\theta=20°,\phi=-70°)$ 에 대하여, 점 C와 점 D사이의 거리

점 D를 직교좌표계로 변환하면 $x = r\sin\theta\cos\phi = 5\sin 20°\cos(-70°) = 0.585$, $y = r\sin\theta\sin\phi = 5\sin 20°\sin(-70°) = -1.607$, $z = r\cos\theta = 5\cos 20° = 4.70$이므로 $D(x=0.585, y=-1.607, z=4.7)$가 된다.

$$|\mathbf{R}_{CD}| = \sqrt{(-3-0.585)^2 + (2+1.607)^2 + (1-4.7)^2} = 6.29$$

[Q.4] 벡터계 $\mathbf{H} = \dfrac{A}{\rho}\mathbf{a}_\phi$ 를 원통좌표계에서 구좌표계로 변환하라. 단, A는 상수이다. (10점)

$\rho = r\sin\theta$이고, $\mathbf{a}_\phi$는 구좌표계에서 동일하므로,

$$\mathbf{H} = \frac{A}{r\sin\theta}\mathbf{a}_\phi$$