전기자기학 I   3차시험 풀이

시험일시 : 2023년 6월 20일

---

* 다음의 문제를 정확하게 읽고 풀이과정과 답을 쓰시오. (풀이과정이 없으면 0점 처리함)

[Q.1] 원점에 $30\mu C$으로 대전된 점전하가 있다. 다음을 통과하는 총 전속을 구하라. (20)

[A.1a] $0<\theta<\pi, 0<\phi<\dfrac{\pi}{2}$ 에 의해 둘러쌓인 구는 전체 구의 1/4에 해당하므로

$$\Psi=\frac{Q}{4}=7.5\,[\mu C]$$

[A.1b] $z=13[cm]$인 평면은 전체 공간의 절반에 해당하므로

$$\Psi=\frac{Q}{2}=15\,[\mu C]$$

[Q.2] 가우스(Gauss)의 법칙을 나타내는 식을 적분형과 미분형으로 적고, 가우스 법칙을 설명하라. (20)

[A.2] 가우스 법칙 : 어떤 폐곡면을 통과하는 전속은 그 곡면 내의 총 전하량과 같다.

$$\text{적분형 : }\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=Q,\ \ \text{미분형 : }\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_0$$

[Q.3] $\mathbf{D}=e^{-x}\sin y\,\mathbf{a}_x-e^{-x}\cos y\,\mathbf{a}_y+4z\,\mathbf{a}_z$ [C/m^2]인 경우 원점에 부피 증분이 10^{-9} [m^3]에 둘러싸인 총 전하량의 근사치를 구하라. (20)

[A.3] 미소체적소이므로 전하밀도는 균일하다고 가정할 수 있으므로, <u>전하량 = 체적전하밀도 ×부피</u> 에서 Q를 계산하면.

$$Q=\left(\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta v=(-e^{-x}\sin y+e^{-x}\sin y+4)\times 10^{-9}=4\,[\text{nC}]$$

[Q.4] $\mathbf{D}=4\rho z^2\sin^2\phi\mathbf{a}_\rho+2\rho z^2\sin^2\phi\mathbf{a}_\phi+4\rho^2 z\sin^2\phi\mathbf{a}_z$[C/m^2]인 경우 $P(\rho=2,\phi=110°,z=-1)$에서 $div\,\mathbf{D}$를 구하라. (20)

[A.4] 원통좌표계에서의 발산 공식을 사용하면

$$\begin{aligned}div\,\mathbf{D}&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho D_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial D_z}{\partial z}\\&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho 4\rho z^2\sin^2\phi)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}(2\rho z^2\sin^2\phi)+\frac{\partial}{\partial z}(4\rho^2 z\sin^2\phi)\\&=\frac{1}{\rho}\cdot 8\rho z^2\sin^2\phi+\frac{1}{\rho}\cdot 2\rho z^2(2\sin\phi\cdot\cos\phi)+4\rho^2\sin^2\phi\\&=8z^2\sin^2\phi+4z^2\sin\phi\cos\phi+4\rho^2\sin^2\phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}div\,\mathbf{D}\big|_P&=8\times(-1)^2\sin^2 110°+4\times(-1)^2\sin 110°\cos 110°+4\times 2^2\sin^2 110°\\&=7.0642-1.2856+14.128=19.907\end{aligned}$$

[Q.5] $r = 2, 4, 6$ [m] 인 동심구의 표면이 각각 20 [nC/m^2], -4 [nC/m^2], 10 [nC/m^2]로 대전되어 있다. $r = 1, 3, 5$ [m]에서 $\mathbf{D}$를 구하라. (20)

[A.5] 동심구이므로 모든 전속이 사방으로 퍼져나가며 전속밀도가 거리에 대해서만 변화할 것을 알 수 있다. 또한 원하는 거리의 구 표면을 가우스 폐곡면으로 설정하면 $\mathbf{D}$를 구할 수 있다.

(a) $r < 2$인 경우 내부에 전하가 없으므로, $r = 1$인 경우에는 $D_r = 0$이 된다.

(b) $r = 3$에서는 내부에 $r = 2$인 구표면에 전하가 있으므로,

$$4\pi r^2 D_r = 4\pi \times 2^2 \times 20 \times 10^{-9} \Rightarrow D_r = \frac{80 \times 10^{-9}}{r^2}\,[\mathrm{C/m^2}]$$
$$D_r\big|_{r=3} = \frac{80 \times 10^{-9}}{3^2} = 8.9\,[\mathrm{nC/m^2}]$$

(c) $r = 5$에서는 내부에 $r = 2$,4에 2 개의 구표면전하가 있으므로,

$$4\pi r^2 D_r = 4\pi \times 2^2 \times 20 \times 10^{-9} + 4\pi \times 4^2 \times (-4 \times 10^{-9}) \Rightarrow D_r = \frac{16 \times 10^{-9}}{r^2}\,[\mathrm{C/m^2}]$$
$$D_r\big|_{r=5} = \frac{16 \times 10^{-9}}{5^2} = 6.4\,[\mathrm{nC/m^2}]$$