1 미분 (Differentiation)

1.1 미분의 정의

- 미분 : 함수의 순간 변화량
  - 변화량 : $\frac{\Delta}{\Delta x} f(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
  - 순간 변화량(미분계수) : $\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, 그래프에서 $(x, f(x))$ 점에 접하는 전선의 기울기
- 도함수 : 원래의 함수를 미분하여 생성되는 함수
  - $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
  - 표기법 : $f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}(x), \frac{d}{dx} f(x), \dot{x}, D(f)$

1.2 미분의 공식

1.2.1 선형성

- $(cf)' = cf'$ (c 는 상수)

$$(cf(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = cf'(x)$$

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$

$$\begin{aligned}(f(x) \pm g(x))' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x) - (f(x) \pm g(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) \pm g'(x)\end{aligned}$$

1.2.2 곱의 법칙

- $(fg)' = f'g + fg'$

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} f(x) \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

1.2.3 연쇄 법칙

- $(f \circ g)' = (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) = (f' \circ g)g'$

1.3 여러 함수의 미분

1.3.1 상수함수 : $f(x) = c$

$$(c)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

1.3.2 다항함수 : $f(x) = x^n$

$$
\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(x+\Delta x - x)[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \cdots + x^{n-1}]}{\Delta x} \\
&= \lim_{x\to 0} \left[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \cdots + x^{n-1}\right] \\
&= x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x + \cdots + x^{n-1} = nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

1.3.3 몫의 미분

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

1.3.4 삼각함수

- $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

  – where $\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot 1 \\
&= \cos x
\end{aligned}
$$

- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\tan x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x\cos x + \sin x\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

1.3.5 지수, 로그 함수

- 지수 함수 : $[c^x]' = c^x \ln c$, $c = e$ 인 경우 $[e^x]' = e^x$
- 로그 함수 : $[\log_c x]' = \frac{1}{x\ln c}$, $c = e$ 인 경우 $[\ln x]' = \frac{1}{x}$

2 적분 (Integral)

2.1 적분의 정의

- 적분 : 함수의 면적

$$\lim_{n\to 0}\Sigma_{k=1}^{\infty} f(x_k)\Delta x, \left(x_k = a + k\Delta x, \Delta x = \frac{b-a}{n}\right) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$$

2.2 적분의 종류

2.2.1 부정적분

- 구간이 정해져 있지 않는 적분, 미분의 역과정
- $\int f(x)dx = F(x) + C,\ F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$

2.2.2 정적분

- 구간이 정해져 있는 적분, 계산시 부정적분의 결과를 이용
- $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

2.3 일반적인 적분규칙

- $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \qquad (a \text{ constant})$
- $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- $\int f(x)g(x)\,dx = f(x)\int g(x)\,dx - \int \left[f'(x)\left(\int g(x)\,dx\right)\right]\,dx$
  - $\left[f(x)\int g(x)dx\right]' = f'(x)\int g(x)dx + f(x)\left[\int g(x)dx\right]' = f'(x)\int g(x)dx + f(x)g(x)$
- $\int [f(x)]^n f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad (\text{for } n \neq -1)$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$
- $\int f'(x)f(x)\,dx = \frac{1}{2}[f(x)]^2 + C$

2.4 적분 함수

2.4.1 유리함수

- $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{if } n \neq -1$
  - $\left[x^{n+1}\right]' = (n+1)x^n$
- $\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$

2.4.2 무리함수

- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$
- $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + C$
- $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcsec} x + C$

2.4.3 로그함수

- $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$
  - $[x\ln x - x + C]' = \ln x + x \cdot [\ln x]' - 1 = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$
- $\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \frac{x}{\ln a} + C$

2.4.4 지수함수

- $\int e^x\,dx = e^x + C,$
- $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

2.4.5 삼각함수

- $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
- $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$