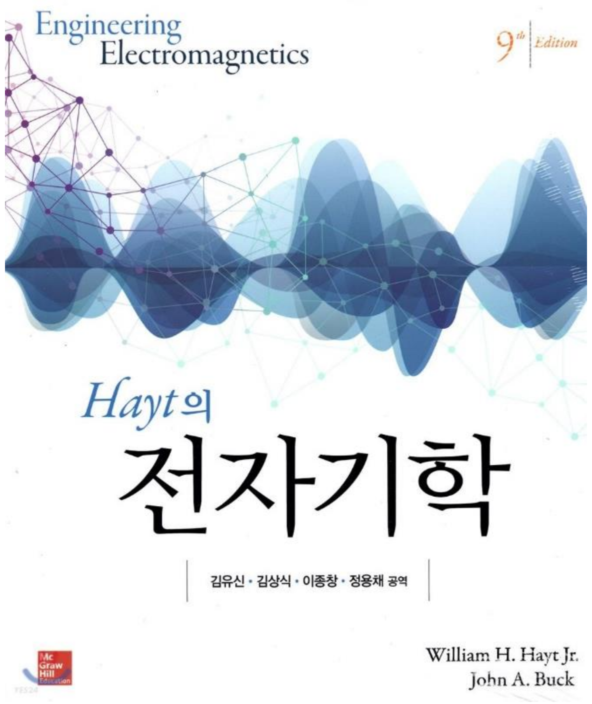
전기자기학 I

(강의자료 #3)



교과목명 : 전기자기학 I

담당교수 : 이 수 형

E-mail : soohyong@uu.ac.kr

교재명 : Hayt의 전자기학

Ch. 3. 전속밀도, 가우스의 법칙 및 발산

CH. 3 : 전속밀도, 가우스의 법칙 및 발산

- 목적 : 전속 및 전속밀도의 개념을 도입한다.

1) 전속밀도

2) 가우스 법칙

3) Gauss 법칙의 응용 예; 대칭전하 분포

4) Gauss 법칙의 응용 예; 미소체적소

5) 벡터계의 발산

6) 맥스웰의 제 1 방정식(정전계)

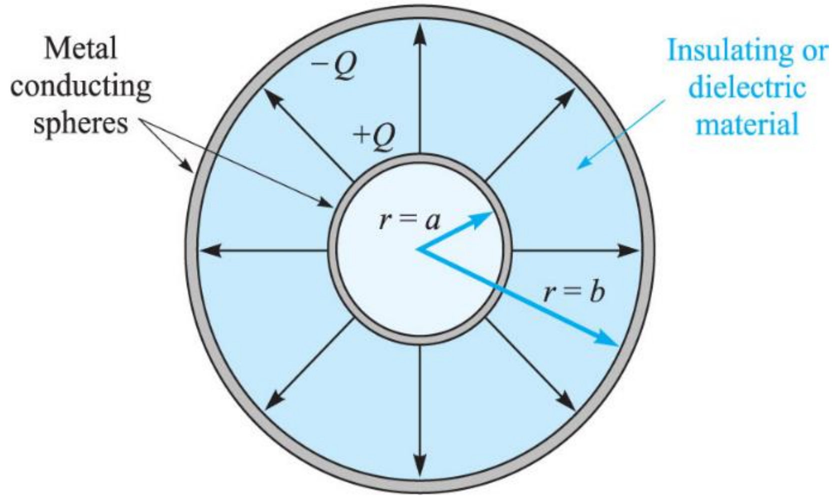
7) 벡터연산자와 발산정리

3.1 전속밀도 – 정의

- 전속(Electric flux) – 실험
  1. 내부 도체구에 이미 알려진 양(+)전하를 인가
  2. 대전된 구의 주위로 유전물질을 채운 후 외부 도체구를 조인다.
  3. 외부 도체구의 외부 표면을 순간적으로 접지시킴으로써 방전시킨다.
  4. 외부 도체구를 절연상태로 유지하며 떼어내 유도된 음전하량을 측정한다.

➢ 매질에 관계없이 내구로부터 외구로 일어나는 변위(displacement) ;
→ 전속(electric flux, Ψ)

$\Psi = Q$ [C]   (Q : 내구상의 총전하량)



3.1 전속밀도 - 정의

- 전속(Electric flux) – 실험
  - 임의의 한 점에서의 전속밀도($\mathbf{D}$)의 방향은 그 점을 통과하는 전속선의 방향과 같으며, 크기는 그 점의 전속과 직각방향인 표면을 통과하는 전속선의 수(Ψ)를 표면적(S)으로 나눈 것과 같다.

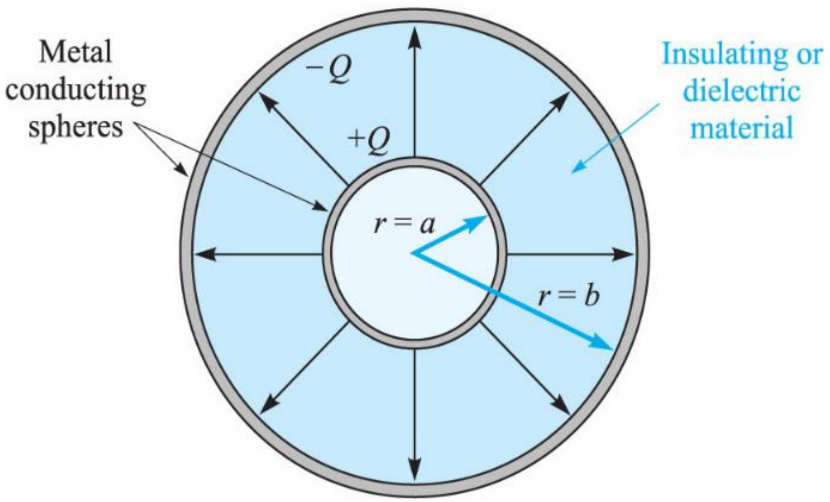
$$\mathbf{D}\Big|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2}\mathbf{a}_r \text{ (내구)}$$

$$\mathbf{D}\Big|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi b^2}\mathbf{a}_r \text{ (외구)}$$

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r \; [\mathrm{C/m^2}]$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r \; [\mathrm{V/m}]$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$$ (자유공간에 한함)



3.1 전속밀도 – 예제

- (예제 3.1) z축을 따라 균일한 선전하밀도 8 nC/m → $\rho = 3$m에서의 **E**, **D**?

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho = \frac{8\times10^{-9}}{2\pi\cdot(8.854\times10^{-12})\cdot3}\mathbf{a}_\rho = 47.9\mathbf{a}_\rho \quad [\mathrm{V/m}]$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\rho = \frac{8\times10^{-9}}{2\pi\cdot3}\mathbf{a}_\rho = 0.424\mathbf{a}_\rho \quad [\mathrm{nC/m^2}]$$

- (ex 1) $Q = 25\ [\mu\text{C}]$ at $O(0,0,0) \rightarrow \Psi$?
  - (a) $0 < \theta < \pi,\ 0 < \phi < \frac{\pi}{2},\ r = 20\ [\text{cm}]$

    $$\Psi = \frac{Q}{4} = 6.25\ [\mu\text{C}]$$

  - (b) $\rho = 8m,\ z = \pm 0.5\ [\text{m}]$의 폐표면

    $$\Psi = Q = 25\ [\mu\text{C}]$$

  - (c) $z = 4\ [\text{m}]$인 평면

    $$\Psi = \frac{Q}{2} = 12.5\ [\mu\text{C}]$$

3.1 전속밀도

- (응용예제 3.1) $Q = 60$ [μC] at $O(0,0,0) \rightarrow \Psi$?
  - (a) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \phi < \frac{\pi}{2}, r = 26$ [cm]의 구의 부분 $\Rightarrow \Psi = \frac{Q}{8} = 7.5$ [μC]
  - (b) $\rho = 26$ [cm], $z = \pm 26$ [cm]에 의해 정의된 닫힌 표면 $\Rightarrow \Psi = 60$ [μC]
  - (c) $z = 26$ [cm]인 평면 $\Rightarrow \Psi = \frac{Q}{2} = 30$ [μC]

3.1 전속밀도

- (ex 2) $\mathbf{D}$ =?(직각좌표계로 표시) at $P(6,8,-10)$
  - (a) $Q = 30$ [mC] at $O(0,0,0)$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r$$

$$= \frac{Q}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$= \frac{30\times 10^{-3}}{4\pi\cdot(6^2+8^2+(-10)^2)}\cdot\frac{6\mathbf{a}_x+8\mathbf{a}_y-10\mathbf{a}_z}{\sqrt{6^2+8^2+(-10)^2}}$$

$$= 5.06\mathbf{a}_x + 6.75\mathbf{a}_y - 8.44\mathbf{a}_z\ [\mu\mathrm{C/m^2}]$$

3.1 전속밀도

- (b) z축 위의 균일한 선전하밀도 $\rho_L = 40\ [\mu\text{C/m}]$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\rho$$

$$= \frac{\rho_L}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{40\times 10^{-6}}{2\pi\cdot(6^2+8^2)}\cdot\left(6\mathbf{a}_x + 8\mathbf{a}_y\right)$$

$$= 0.382\mathbf{a}_x + 0.509\mathbf{a}_y \quad [\mu\text{C/m}^2]$$

- (c) $x = 9\ [\text{m}]$에 있는 평면전하밀도 $\rho_S = \pi/2\ \ [\mu\text{C/m}^2]$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2}(-\mathbf{a}_x) = -\frac{\frac{\pi}{2}\times 10^{-6}}{2}\mathbf{a}_x = -0.785\mathbf{a}_x\ [\mu\text{C/m}^2]$$

3.1 전속밀도

- (응용예제 3.2) $\mathbf{D}$ =?(직각좌표계로 표시) at $P(2,-3,6)$
  - (a) $Q = 55\ mC$ at $O(-2,3,-6)$

    $\mathbf{D} = 6.38\mathbf{a}_x - 9.57\mathbf{a}_y + 19.14\mathbf{a}_z\ \ \mu C/m^2$
  - (b) x축 위에 있는 균일한 선전하 $\rho_L = 20mC/m$

    $\mathbf{D} = -212\mathbf{a}_y + 424\mathbf{a}_z\ \ \mu C/m^2$
  - (c) $z = -5\ m$ 평면 위에 있는 균일한 표면전하밀도 $\rho_S = 120\ \ \mu C/m^2$

    $\mathbf{D} = 60\mathbf{a}_z\ \ \mu C/m^2$

3.2 가우스 법칙

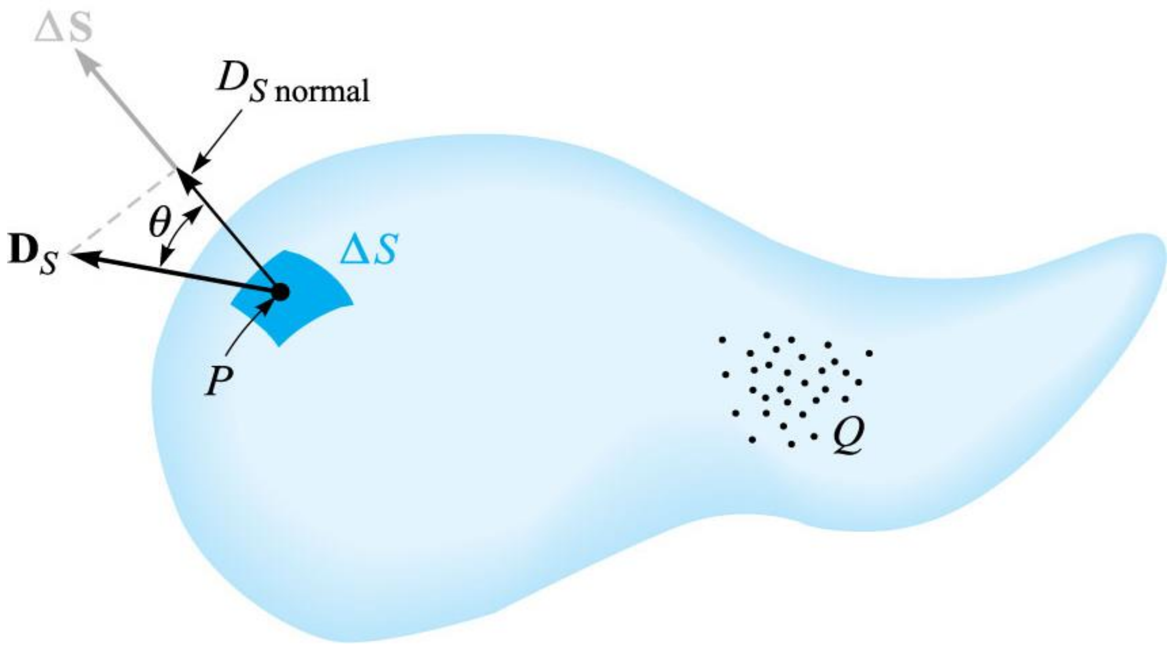
- 어떤 폐곡면을 통과하는 전속은 그 곡면 내에 있는 총전하량과 같다.

$\Delta\Psi = \Delta S$를 통과하는 전속 $= D_{s,norm}\,\Delta S = D_s \cos\theta\,\Delta S = \mathbf{D}_s \cdot \Delta\mathbf{S}$

$$\Psi = \int d\Psi = \oint \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \text{폐곡면 내의 총전하량} = Q = \int_v \rho_v\, dv \; [C]$$

- 점전하 : $Q = \sum Q_n$
- 선전하 : $Q = \int \rho_L\, dL$
- 표면전하 : $Q = \int_S \rho_S\, dS$
- 체적전하분포 : $Q = \int_{vol} \rho_v\, dv$

$$\oint \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \int_{vol} \rho_v\, dv \; [C]$$



3.2 가우스 법칙

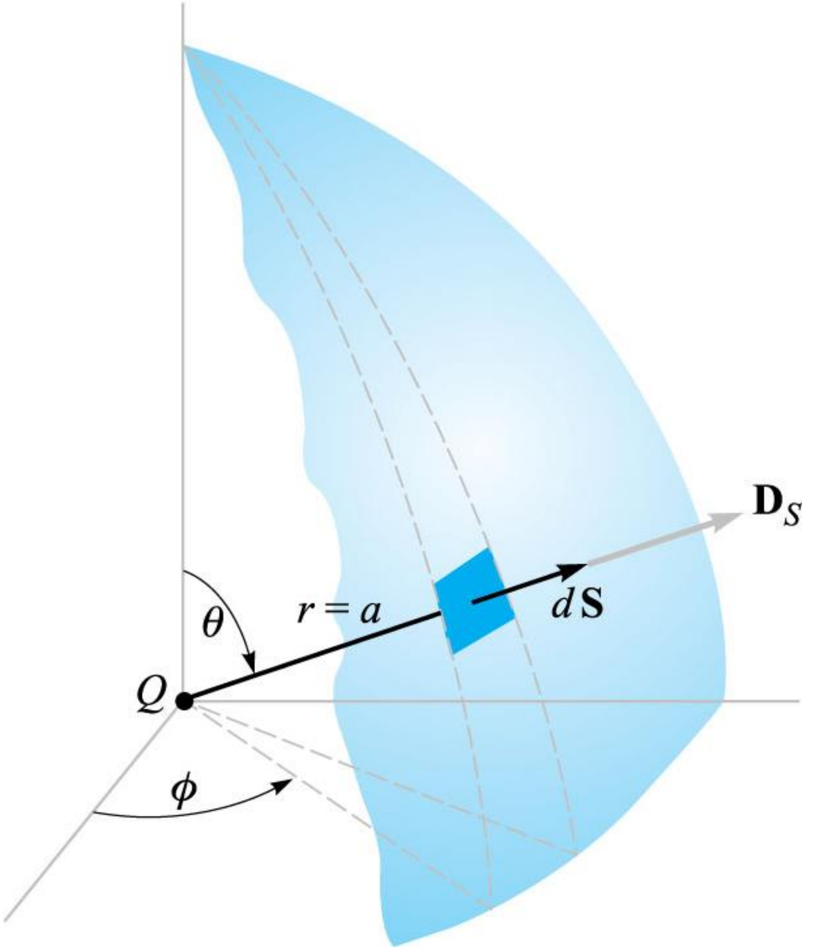
- (ex 3) Q at $O(0,0,0) \rightarrow \mathbf{D}$ =? at $r = a$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{D}_S = \varepsilon_0 \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi a^2}\mathbf{a}_r \text{ at } r = a$$

$$d\mathbf{S} = r^2 \sin\theta \, d\theta d\phi \mathbf{a}_r = a^2 \sin\theta \, d\theta d\phi \mathbf{a}_r$$

$$\oint \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \oint \left(\frac{Q}{4\pi a^2}\mathbf{a}_r\right) \cdot (a^2 \sin\theta \, d\theta d\phi \mathbf{a}_r)$$



- (ex 3) Q at $O(0,0,0) \rightarrow \mathbf{D} =?$ at $r = a$

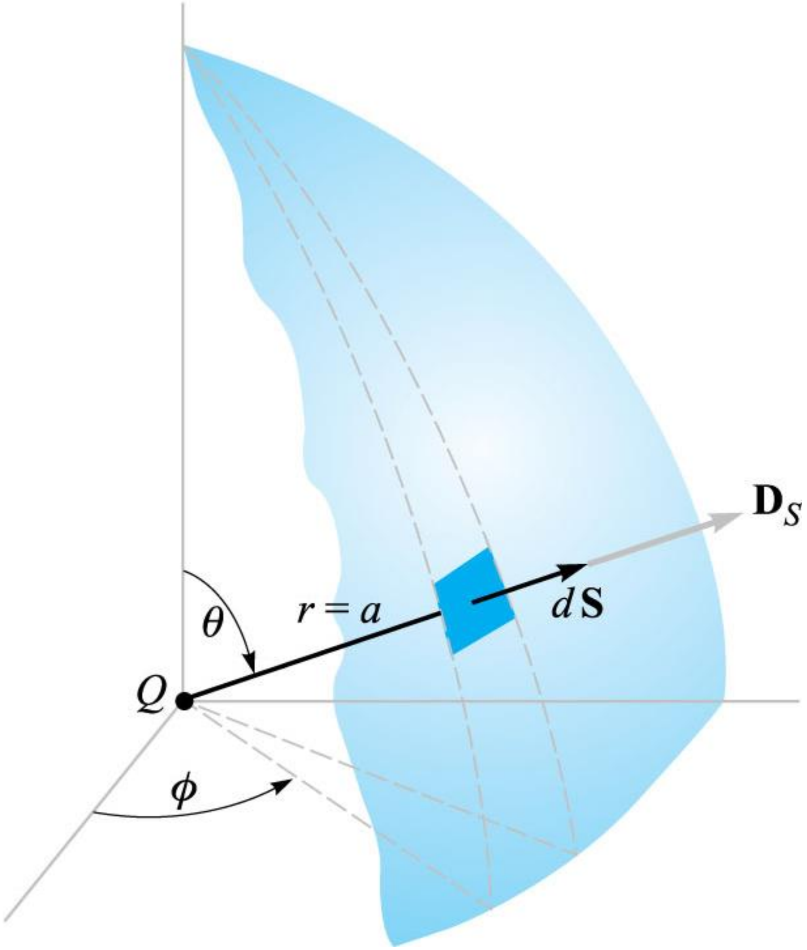
$$\oint \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \oint \left(\frac{Q}{4\pi a^2} \mathbf{a}_r \right) \cdot (a^2 \sin\theta \, d\theta d\phi \mathbf{a}_r)$$

$$= \oint \frac{Q}{4\pi} \sin\theta \, d\theta d\phi \, \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r$$

$$= \frac{Q}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, d\theta d\phi$$

$$= \frac{Q}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, d\theta = \frac{Q}{4\pi} [\phi]_0^{2\pi} [-\cos\theta]_0^{\pi}$$

$$= \frac{Q}{4\pi} [2\pi - 0][-(-1) - (-1)] = Q$$



- (ex 4) $\mathbf{D} = \frac{r}{3}\mathbf{a}_r \quad nC/m^2$(자유공간)
  - (a) E =? at $r = 0.2\ m$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} = \frac{r \times 10^{-9}}{3\varepsilon_0}\mathbf{a}_r$$

$$\therefore E = \frac{0.2 \times 10^{-9}}{3 \times 8.854 \times 10^{-12}} = 7.53 \quad V/m$$

  - (b) Q =? at $r = 0.2\ m$

$$Q = \Psi = \oint \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \oint \frac{r \times 10^{-9}}{3}\mathbf{a}_r \cdot r^2 \sin\theta\ d\theta d\phi \mathbf{a}_r$$

$$= \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{0.2^3 \times 10^{-9}}{3}\sin\theta\ d\theta d\phi$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{0.2^3 \times 10^{-9} \times 2\pi}{3}\sin\theta\ d\theta$$

$$= \frac{0.2^3 \times 10^{-9} \times 2\pi}{3}[-\cos\theta]_0^{\pi} = 33.5 \quad pC$$

3.2 가우스 법칙

- (c) $r = 0.3\ m$인 구를 통과하는 Ψ =?

$$\Psi = \oint \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \frac{r \times 10^{-9}}{3} \cdot 4\pi r^2$$

$$= \frac{0.3^3 \times 10^{-9} \times 4\pi}{3}$$

$$= 113.1\ pC$$

3.2 가우스 법칙

- (응용예제 3.3) $\mathbf{D} = 0.3r^2\mathbf{a}_r nC/m^2$(자유공간)
  - (a) $\mathbf{E} =?$ at $P(r = 2, \theta = 25°, \phi = 90°)$

    $\mathbf{E} = 135.5\mathbf{a}_r\ V/m$

  - (b) $r = 3$인 구 내부에서의 $Q =?$

    $Q = 305\ nC$

  - (c) $r = 4$인 구를 떠나는 총 전속선

    $\Psi = 965\ nC$

3.2 가우스 법칙

- (ex 5) $r = 2.5m$인 구의 표면을 지나는 총전속 Ψ?
  - (a) $Q = 2^{-x^2} nC$ at $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$

    Ψ = 폐곡면 내의 총전하량 $= 2^{-x^2} \times 10^{-9} + 2^{-x^2} \times 10^{-9} + 2^{-x^2} \times 10^{-9}$

    $= (1 + 2 \times 2^{-1} + 2 \times 2^{-4}) \times 10^{-9} = 2.125\, nC$
  - (b) $\rho_L = \frac{1}{z^2+1} nC/m$ at z축

    Ψ = 폐곡면 내의 총전하량 $= Q = \int_v \rho_v\, dv = \int_l \rho_L\, dl = \int_{z=-2.5}^{z=2.5} \frac{1 \times 10^{-9}}{z^2+1} dz = \cdots = 2.38\, nC$
  - (c) $\rho_S = \frac{1}{x^2+y^2+4} nC/m^2$ at $z = 0$

    Ψ = 폐곡면 내의 총전하량 $= Q = \int_v \rho_v\, dv = \int_S \rho_S\, dS$

    $= \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{r=0}^{r=2.5} \frac{1 \times 10^{-9}}{x^2+y^2+4} r dr d\phi = 2\pi \int_{r=0}^{r=2.5} \frac{r \times 10^{-9}}{r^2+4} dr = \cdots = 2.96\, nC$

- (응용예제 3.4) $x, y, z = \pm 5$에 의해 형성된 육면체의 표면을 떠나는 총전속 Ψ?
  - (a) $Q_1 = 0.1\ \mu C$ at $P_1(1,-2,3)$ & $Q_2 = \frac{1}{7}\ \mu C$ at $P_2(-1,2,-2)$

    $\Psi = 0.243\ \ \mu C$
  - (b) $\rho_L = \pi\ \mu C/m$ at $x = -2, y = 3$

    $\Psi = 31.4\ \ \mu C$
  - (c) $\rho_S = 0.1\ \mu C/m^2$ at $y = 3x$

    $\Psi = 10.54\ \ \mu C$

3.3 가우스 법칙의 응용예; 대칭전하 분포

- $Q = \oint \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} \quad \rightarrow \quad \mathbf{D}_S = ?$
- 가우스 표면의 정의 : 다음과 같은 두 가지 조건이 만족되도록 폐곡면을 선택하면 쉽게 적분방정식의 해를 구할 수 있다.

1. 모든 점에서 $\mathbf{D}_S$가 폐곡면과 수직이거나 접선방향
   $\rightarrow \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = D_S dS$ 또는 $\mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = 0$
2. $\mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = D_S dS$인 곳에서는 $\int D_S\, dS = D_S \int dS = D_S \Delta S$를 만족

3.3 가우스 법칙의 응용예; 대칭전하 분포

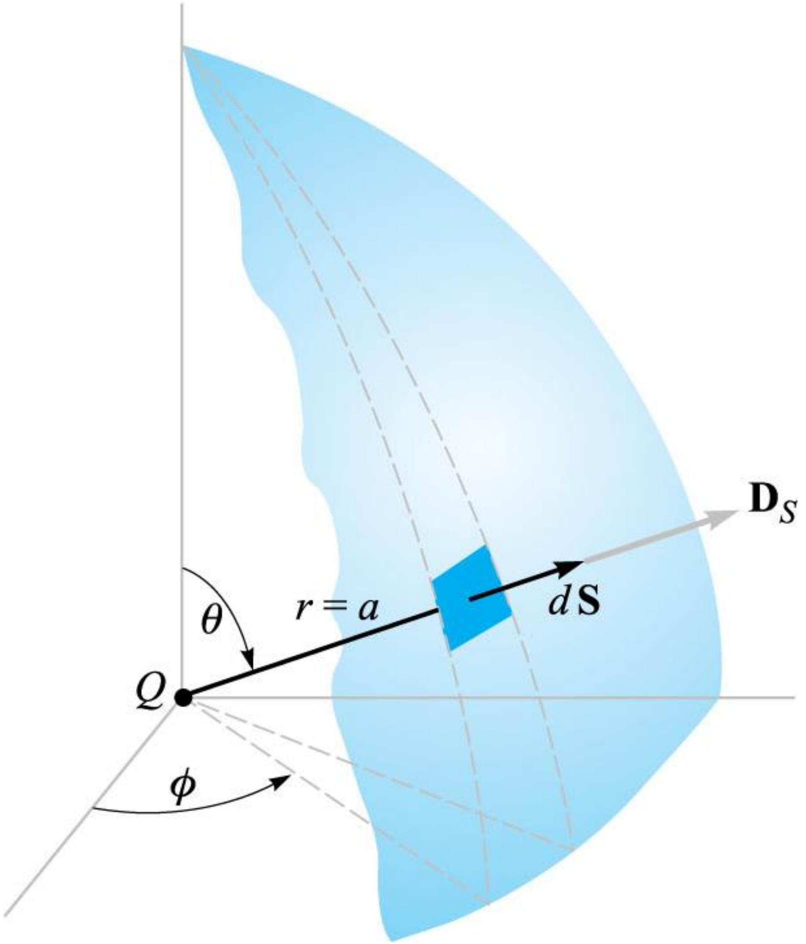
- (ex 6) 원점에 점전하 $Q \rightarrow r$만큼 떨어진 곳에서의 D_S?

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \rightarrow D_S = \varepsilon_0 E = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$Q = \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \oint_{sph} D_S \, dS = D_S \oint_{sph} dS$$

$$= D_S \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2 \sin\theta \, d\theta d\phi$$

$$= 4\pi r^2 D_S \quad \rightarrow \quad D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$$



3.3 가우스 법칙의 응용예; 대칭전하 분포

- (ex 7) 길이가 무한대인 선전하(ρ_L [C/m])에 의한 전속밀도 D_S

길이가 L [m]인 원통 모양의 가우스 표면을 잡아주면

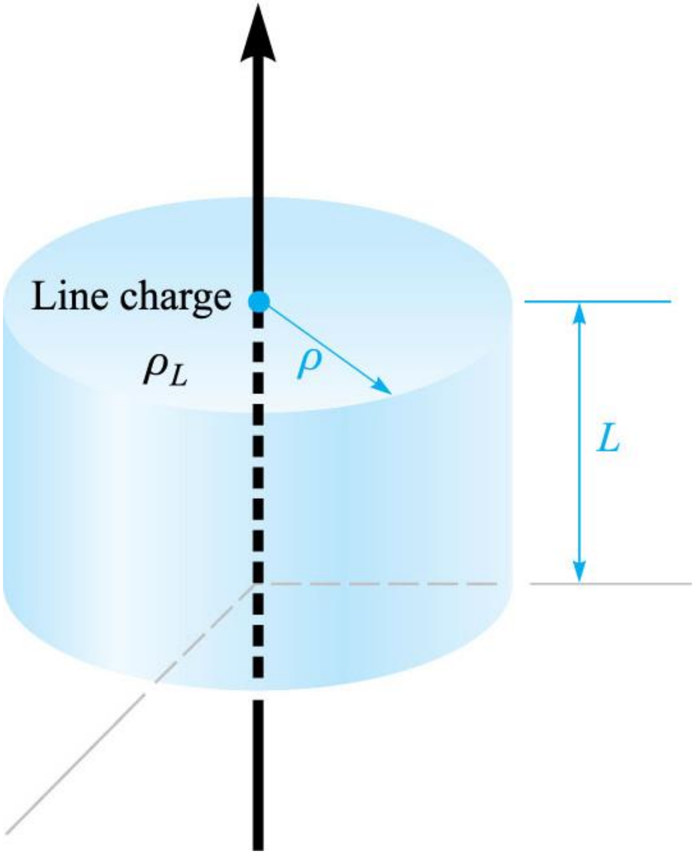
$$Q = \oint_{cyl} \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}$$

$$= D_S \int_{sides} dS + 0 \int_{top} dS + 0 \int_{bottom} dS$$

$$= D_S \int_{z=0}^{L} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho \, d\phi dz$$

$$= D_S 2\pi\rho L$$

$$\therefore D_S = D_\rho = \frac{Q}{2\pi\rho L} = \frac{\rho_L L}{2\pi\rho L} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}$$



3.3 가우스 법칙의 응용예; 대칭전하 분포

- (예제 3.2) $a = 1[\mathrm{mm}]$, $b = 4\ [\mathrm{mm}]$, $L = 50\ [\mathrm{cm}]$, $Q_1 = 30\ [\mathrm{nC}]$인 동축 케이블 → $\rho_{S_1}, \rho_{S_2}, \mathbf{E}, \mathbf{D} = ?$

$$\rho_{S_1};\ \rho_{S_1} = \frac{Q_1}{S_1} = \frac{Q_1}{2\pi a L} = \frac{30\times10^{-9}}{2\pi\times10^{-3}\times0.5} = 9.55\ \ \mu\mathrm{C/m^2}$$

$$\rho_{S_2};\ Q_2 = -Q_1 = -30nC, \rho_{S_2} = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{-Q_1}{2\pi b L} = \frac{-30\times10^{-9}}{2\pi\times(4\times10^{-3})\times0.5} = -2.39\ \ \mu\mathrm{C/m^2}$$

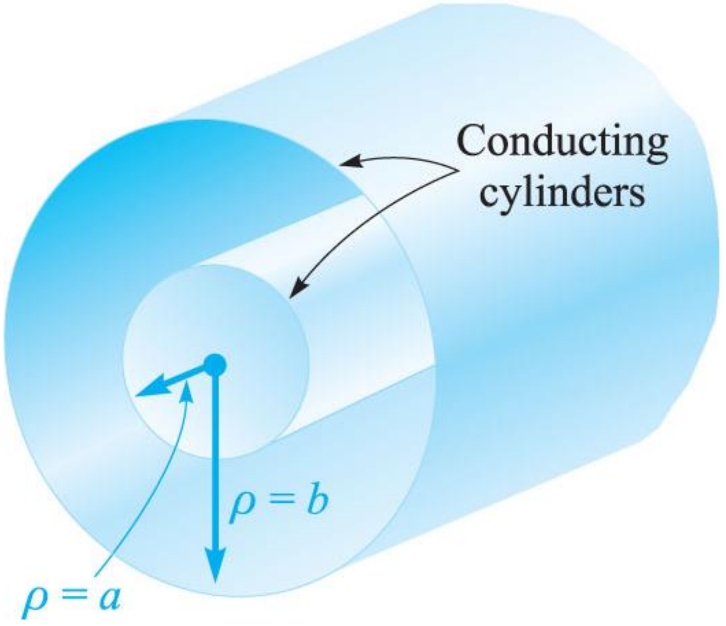
- **D**; $a \le \rho < b$일 때

$$Q_1 = \oint_{cyl} \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = 0\int_{left} dS + D_\rho \int_{sides} dS + 0\int_{right} dS = D_\rho 2\pi\rho L$$

$$D_\rho = \frac{Q_1}{2\pi\rho L} = \frac{\rho_{S_1} 2\pi a L}{2\pi\rho L} = \frac{a\rho_{S_1}}{\rho} = \frac{10^{-3}\times(9.55\times10^{-6}}{\rho} = \frac{9.55}{\rho}\ \mathrm{nC/m^2}$$

- **E**; $a \le \rho < b$일 때

$$E_\rho = \varepsilon_0 D_\rho = \frac{9.55\times10^{-9}}{8.854\times10^{-12}\rho} = \frac{1079}{\rho}\ \ V/m$$



3.3 가우스 법칙의 응용예: 대칭전하 분포

- (ex 8) $200\ [\mu C/m^2]$ at $r = 3\ [cm]$, $-50\ [\mu C/m^2]$ at $r = 5\ [cm]$, $\rho_{S_x}\ [\mu C/m^2]$ at $r = 7㎝ \rightarrow \mathbf{D} = ?$
  - (a) at $r = 2\ [cm]$

    $Q_{enc} = 0 \rightarrow D_S = 0$

  - (b) at $r = 4\ [cm]$

    $$Q = D_S \int_{sph} dS = D_S 4\pi r^2$$

    $$D_S = D_r = \frac{Q}{4\pi r^2} = 200 \times 10^{-6} \times \frac{4\pi \times 0.03^2}{4\pi \times 0.04^2} = 112.5 \mu C/㎡$$

3.3 가우스 법칙의 응용예; 대칭전하 분포

- (ex 8) $200\mu C/m^2$ at $r = 3$ [cm], -50 [μC/m^2] at $r = 5$ [cm], ρ_{S_x} [μC/m^2] at $r = 7$㎝ $\rightarrow$ $\mathbf{D} =?$
  - (c) at $r = 6$ [cm]

$$Q = D_S \int_{sph} dS = D_S 4\pi r^2$$

$$D_S = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi r^2} = \frac{(200 \times 10^{-6})(4\pi \times 0.03^2) + (-50 \times 10^{-6})(4\pi \times 0.05^2)}{4\pi \times 0.06^2}$$

$$= \frac{200 \times 0.03^2 - 50 \times 0.05^2}{0.06^2} \times 10^{-6} = 15.28 \ [\mu\text{C/m}^2]$$

  - (d) $r = 7.32$ [cm]일 때 $\mathbf{D} = 0$ $\rightarrow$ $\rho_{S_x} = ?$

$$D_S = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{4\pi \times 0.0732^2} = 0 \quad \Rightarrow 200 \times 0.03^2 - 50 \times 0.05^2 + \rho_{S_x} \times 0.07^2 = 0$$

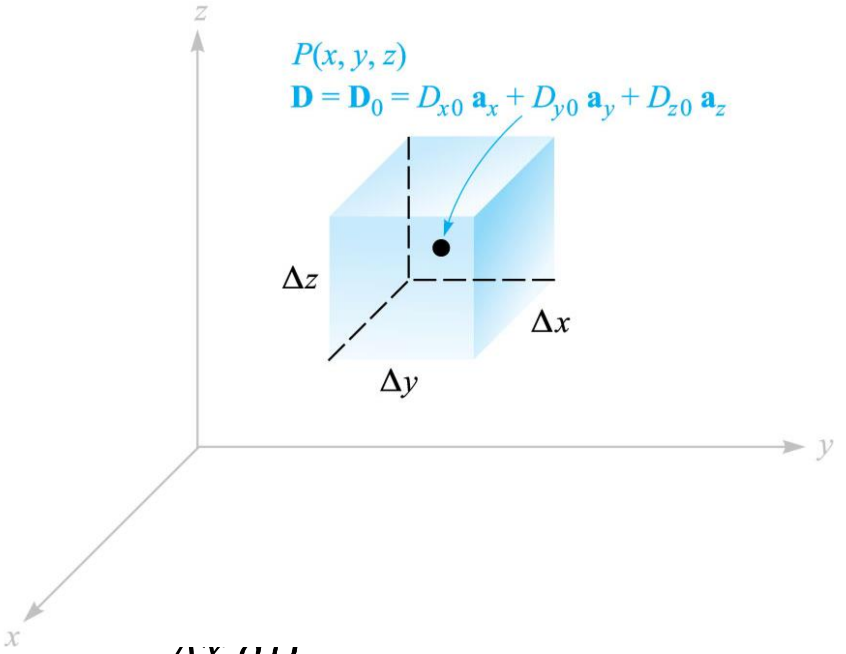
$$\rho_{S_x} = \frac{200 \times 0.03^2 - 50 \times 0.05^2}{-0.07^2} = -11.22 \ [\mu\text{C/m}^2]$$

3.4 가우스 법칙의 응용예; 미소체적소

- 가우스 표면을 미소체적소로 정의 → 가우스 표면에 대한 일반화

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q$$

- 직교좌표계에서의 미소체적소에 대하여 적용하면



$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_{front} + \int_{back} + \int_{left} + \int_{right} + \int_{top} + \int_{bottom}$$

$$\int_{front} \cong \mathbf{D}_{front}\cdot\Delta\mathbf{S}_{front} \cong \mathbf{D}_{front}\cdot\Delta y\Delta z\mathbf{a}_x \cong D_{x,front}\Delta y\Delta z$$

$$\text{where}, D_{x,front} \cong D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\times(x\text{에 대한 } D_x\text{의 변화율}) = D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}$$

$$\int_{front} \cong \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y\Delta z$$

3.4 가우스 법칙의 응용예; 미소체적소

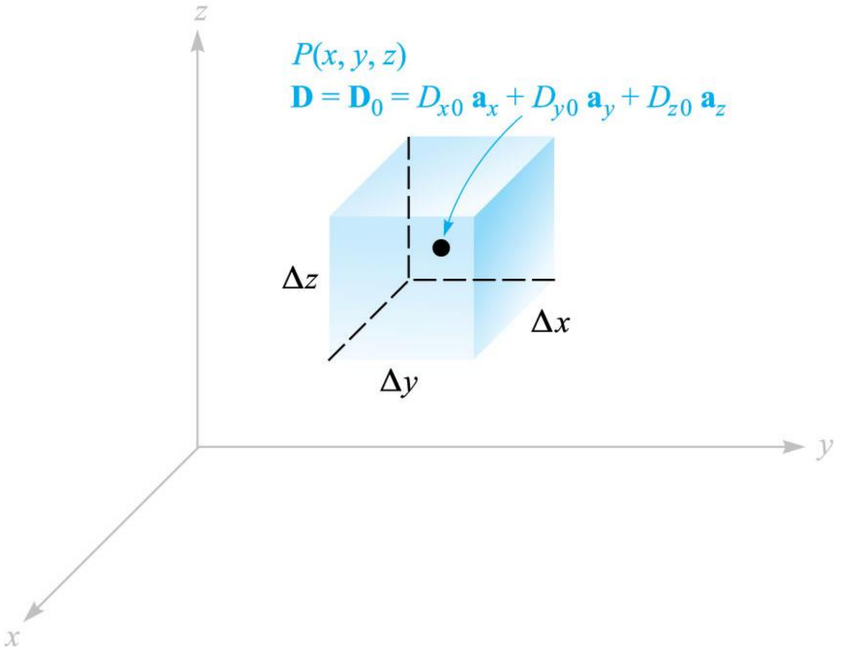
$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_{front} + \int_{back} + \int_{left} + \int_{right} + \int_{top} + \int_{bottom}$$

$$\int_{front} \cong \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z$$

$$\int_{back} \cong \mathbf{D}_{back}\cdot \Delta\mathbf{S}_{back} \cong \mathbf{D}_{back}\cdot(-\Delta y\Delta z\mathbf{a}_x)$$

$$\cong -D_{x,back}\Delta y\Delta z$$

$$\text{where}, D_{x,back} \cong D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}$$



$$\int_{back} \cong \left(-D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y\Delta z \quad \Rightarrow \quad \int_{front} + \int_{back} \cong \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

3.4 가우스 법칙의 응용예; 미소체적소

$$\therefore \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \cong \left(\frac{\partial Dx}{\partial x} + \frac{\partial Dy}{\partial y} + \frac{\partial Dz}{\partial z}\right) \Delta x \Delta y \Delta z = \left(\frac{\partial Dx}{\partial x} + \frac{\partial Dy}{\partial y} + \frac{\partial Dz}{\partial z}\right) \Delta v$$

$$\Delta v \text{ 내의 전하량} \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) \times \Delta v$$

$$\rho_v = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

3.4 가우스 법칙의 응용예; 미소체적소

- (ex 9) $\mathbf{D} = y^2z^3\mathbf{a}_x + 3xyz^3\mathbf{a}_y + 3xy^2z^2\mathbf{a}_z$ [pC/m²] (자유공간)
  - (a) 원점으로부터 $x = 3,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 1$인 표면을 통과하는 총전속

$$\Psi = \int_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_S D_x\,dydz = \int_{z=0}^{z=1}\int_{y=0}^{y=2} y^2 z^3 \times 10^{-12} dydz = \left[\frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=2} \times \left[\frac{1}{4}z^4\right]_{z=0}^{z=1} \times 10^{-12} = 0.667\ [pC]$$

  - (b) $\mathbf{E}$ at $P(3,2,1)$

$$\mathbf{D} = 4\mathbf{a}_x + 18\mathbf{a}_y + 36\mathbf{a}_z\ [\mathrm{pC/m^2}]$$

$$\therefore \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} = \frac{4\mathbf{a}_x + 18\mathbf{a}_y + 36\mathbf{a}_z}{8.854}\ \ [\mathrm{V/m}]$$

  - (c) 점 $P(3,2,1)$에서 반경 2 [μm]의 미소구에 포함된 총전하

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q \doteq \left(\frac{\partial Dx}{\partial x} + \frac{\partial Dy}{\partial y} + \frac{\partial Dz}{\partial z}\right)\Delta v = (0 + 3xz^3 + 6xy^2z) \times 10^{-12} \times \frac{4}{3}\pi\cdot(2\times10^{-6})^3$$

$$= (9 + 72) \times \frac{4}{3}\pi \times 8 \times 10^{-30} = 2.71 \times 10^{-27}\ [C]$$

3.4 가우스 법칙의 응용예; 미소체적소

- (예제 3.3) $\mathbf{D} = e^{-x} \sin y \, \mathbf{a}_x - e^{-x} \cos y \, \mathbf{a}_y + 2z\mathbf{a}_z \ [\mathrm{C/m^2}]$

  $\Delta v = 10^{-9} \ [\mathrm{m^3}]$ 내의 총 전하량 $Q = ?$

$$Q = \left(\frac{\partial Dx}{\partial x} + \frac{\partial Dy}{\partial y} + \frac{\partial Dz}{\partial z}\right)\Delta v = (-e^{-x}\sin y + e^{-x}\sin y + 2)\Delta v = 2[nC]$$

3.4 가우스 법칙의 응용예; 미소체적소

- (응용예제 3.6) $\mathbf{D} = 8xyz^4\mathbf{a}_x + 4x^2z^4\mathbf{a}_y + 16x^2yz^3\mathbf{a}_z\ [\mathrm{pC/m^2}]$
  - (a) $z = 2,\ 0 < x < 2,\ 1 < y < 3$인 표면을 $\mathbf{a}_z$으로 통과하는 총 전속

    $\Psi = 1365\ \ [pC]$

  - (b) $\mathbf{E}$ at $P(2, -1,3)$

    $\mathbf{D} =$

    $$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} = -146.4\mathbf{a}_x + 146.4\mathbf{a}_y - 195.2\mathbf{a}_z\ \ [V/m]$$

  - (c) 점 $P(2, -1,3)$에서 부피 $10^{-12}\ [\mathrm{m}^3]$ 의 미소구에 포함된 총 전하량의 근사치

    $$Q = \left(\frac{\partial Dx}{\partial x} + \frac{\partial Dy}{\partial y} + \frac{\partial Dz}{\partial z}\right)\Delta v$$
    $$= (8yz^4 + 0 + 48x^2yz^2) \times 10^{-12}\Delta v$$
    $$= (-8 \times 81 - 48 \times 4 \times 9) \times 10^{-12} \times 10^{-12} = -2.376 \times 10^{-21}[\mathrm{C}]$$

3.5 벡터계의 발산

- 발산(divergence)의 정의

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \doteq \left(\frac{\partial Dx}{\partial x} + \frac{\partial Dy}{\partial y} + \frac{\partial Dz}{\partial z}\right) \Delta v$$

$$\left(\frac{\partial Dx}{\partial x} + \frac{\partial Dy}{\partial y} + \frac{\partial Dz}{\partial z}\right) \doteq \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v}$$

$$\left(\frac{\partial Dx}{\partial x} + \frac{\partial Dy}{\partial y} + \frac{\partial Dz}{\partial z}\right) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q}{\Delta v} = \rho_v$$

- 임의의 벡터 **A**에 대하여

$$\mathbf{A}\text{의발산} = div\ \mathbf{A} = \left(\frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z}\right) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

3.5 벡터계의 발산

- 임의의 벡터 **A**에 대하여

$$\mathbf{A}\text{의발산} = div\ \ \mathbf{A} = \left(\frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z}\right) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

- 발산의 물리적 의미

1. 전속밀도의 발산은 미소체적소의 폐곡면으로부터 밖으로 나오는 단위체적당 전속의 극한값과 같다.
2. 전속밀도의 발산이 0이 아니면 내부에 전하(source)가 존재하고, 0이면 내부에 전하가 존재하지 않는다.

3.5 벡터계의 발산

- 각 좌표계에서 발산의 계산
  - (1) 직각좌표계

$$div\ \mathbf{D} = \frac{\partial Dx}{\partial x} + \frac{\partial Dy}{\partial y} + \frac{\partial Dz}{\partial z}$$

  - (2) 원통좌표계

$$div\ \mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

  - (3) 구좌표계

$$div\ \mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\ D_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \theta}$$

3.5 벡터계의 발산

- (예제 3.4) $\mathbf{D} = e^{-x}\sin y\,\mathbf{a}_x - e^{-x}\cos y\,\mathbf{a}_y + 2z\mathbf{a}_z \rightarrow div\mathbf{D} =?$ at $O(0,0,0)$

$$
\begin{aligned}
div\ \mathbf{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\
&= -e^{-x}\sin y + e^{-x}\sin y + 2 \\
&= 2\ \ [\mathrm{C/m^3}]
\end{aligned}
$$

- (ex 10) $div\mathbf{D}$ =?
  - (a) $\mathbf{D} = 20xy^2(z-1)\mathbf{a}_x + 20x^2y(z+1)\mathbf{a}_y + 10x^2y^2\mathbf{a}_z$ [C/m²] at $P_A(0.3,0.4,0.5)$

$$div\,\mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$= 20y^2(z-1) + 20x^2(z+1)$$

$$= 20 \times 0.4^2 \times (0.5-1) + 20 \times 0.3^2 \times (0.5+1) = 1.1\ [\mathrm{C/m^3}]$$

  - (b) $\mathbf{D} = 4\rho z \sin\phi\, \mathbf{a}_\rho + 2\rho z \cos\phi\, \mathbf{a}_\phi + 2\rho^2 \sin\phi\, \mathbf{a}_z$ [C/m²] at $P_H(1, \pi/2, 2)$

$$div\,\mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{\rho}8\rho z \sin\phi + \frac{1}{\rho}2\rho z(-\sin\phi)$$

$$= \frac{1}{1} \times 8 \times 1 \times 2 \times \sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{1} \times 2 \times 1 \times 2 \times \sin\frac{\pi}{2} = 12\ [\mathrm{C/m^3}]$$

3.5 벡터계의 발산

➢ (c) $\mathbf{D} = \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_r + \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_\theta - \sin\phi\,\mathbf{a}_\phi$ $[\mathrm{C/m^2}]$ at $P_C(2, \theta = \pi/3, \phi = \pi/6)$

$$div\,\mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,D_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\theta}$$

$$= \frac{1}{r^2}2r\sin\theta\cos\phi + \frac{1}{r\sin\theta}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\phi - \frac{1}{r\sin\theta}\cos\phi$$

$$= \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}(2\sin^2\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta - 1)$$

$$= \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}(\sin^2\theta + \cos^2\theta - 1) = 0$$

3.5 벡터계의 발산

- (응용예제 3.7) $div\ \mathbf{D} = ?$
  - (a) $\mathbf{D} = (2xyz - y^2)\mathbf{a}_x + (x^2z - 2xy)\mathbf{a}_y + x^2y\mathbf{a}_z$ at $P_A(2,3,-1)$
  - (b) $\mathbf{D} = 2\rho z^2 \sin^2\phi\ \mathbf{a}_\rho + \rho z^2 \sin 2\phi \mathbf{a}_\phi + 2\rho^2 z \sin^2\phi\ \mathbf{a}_z$ at $P_B(2,110°,-1)$
  - (c) $\mathbf{D} = 2r\sin\theta\cos\phi\ \mathbf{a}_r + r\cos\theta\cos\phi\ \mathbf{a}_\theta - r\sin\phi\ \mathbf{a}_\phi$ at $P_C(1.5,30°,50°)$
  - (a) -10.00 (b) 9.06 (c) 2.18

3.6 맥스웰의 제1방정식(정전계)

- $div\ \mathbf{D} = \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}$: 발산의 정의
- $div\ \mathbf{D} = \frac{\partial Dx}{\partial x} + \frac{\partial Dy}{\partial y} + \frac{\partial Dz}{\partial z} = \rho_v$: 발산의 정의를 직각좌표계에 적용

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

(가우스 법칙)

$$\frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v}$$

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q}{\Delta v}$$

$$div\ \mathbf{D} = \rho_v$$

(맥스웰의 제 1 방정식)

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

(적분형) (미분형)

$$div\ \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

3.6 맥스웰의 제1방정식(정전계)

- (ex 11) ρ_v =?
  - (a) $\mathbf{D} = xy^2\mathbf{a}_x + yx^2\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ $[\mathrm{C/m^2}]$

$$\rho_v = div\mathbf{D} = \frac{\partial Dx}{\partial x} + \frac{\partial Dy}{\partial y} + \frac{\partial Dz}{\partial z}$$

$$= y^2 + x^2 + 1 \quad [\mathrm{C/m^3}]$$

  - (b) $\mathbf{D} = \rho z^2 \sin^2\phi\, \mathbf{a}_\rho + \rho z^2 \sin\phi \cos\phi\, \mathbf{a}_\phi + \rho^2 z \sin^2\phi\, \mathbf{a}_z$ $[\mathrm{C/m^2}]$

$$\rho_v = div\mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{\rho}2\rho z^2 \sin^2\phi + \frac{1}{\rho}\rho z^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + \rho^2 \sin^2\phi$$

$$= z^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) + \rho^2 \sin^2\phi$$

$$= z^2 + \rho^2 \sin^2\phi \quad [\mathrm{C/m^3}]$$

3.6 맥스웰의 제1방정식(정전계)

- (ex 11) ρ_v =?
  - (c) $\mathbf{D} = \mathbf{a}_r \ [\mathrm{C/m^2}]$

$$\rho_v = div\mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, D_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\theta}$$

$$= \frac{1}{r^2}2r$$

$$= \frac{2}{r} \ [\mathrm{C/m^3}]$$

3.7 벡터연산자와 발산정리

- 직각좌표계에서 벡터연산자 ∇(Del)의 정의

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

- ∇ 연산자의 적용

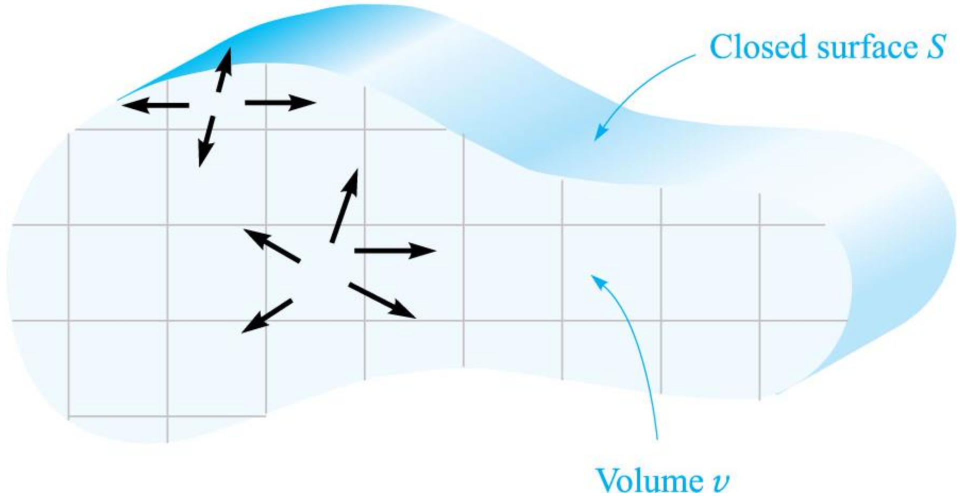
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z\right) \cdot \left(D_x\mathbf{a}_x + D_y\mathbf{a}_y + D_z\mathbf{a}_z\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(D_x) + \frac{\partial}{\partial y}(D_y) + \frac{\partial}{\partial z}(D_z)$$

$$= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = div\ \mathbf{D}$$

- 발산정리(divergence theorem)

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{vol} \nabla \cdot \mathbf{D} dv$$



한 폐곡면을 통해서 밖으로 나가는 전체 선속수는 폐곡면 내의 체적 전체에 대한 선속밀도의 발산을 적분한 것과 같다.

3.7 벡터연산자와 발산정리

- (예제 3.5) $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$인 전계 내에 있는 $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, z = 0, z = 3$인 6개 면으로 이루어진 직육면체 내의 전하량을 발산정리를 이용하여 비교하여라.
  - (a) From Gauss' Law

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^3 \int_0^2 (\mathbf{D})_{x=0} \cdot (-dydz\mathbf{a}_x) + \int_0^3 \int_0^2 (\mathbf{D})_{x=1} \cdot (dydz\mathbf{a}_x) + \int_0^3 \int_0^1 (\mathbf{D})_{y=0} \cdot (-dxdz\mathbf{a}_y)$$

$$+ \int_0^3 \int_0^1 (\mathbf{D})_{y=2} \cdot (dxdz\mathbf{a}_y) + \int_0^2 \int_0^1 (\mathbf{D})_{z=0} \cdot (-dxdy\mathbf{a}_z) + \int_0^2 \int_0^1 (\mathbf{D})_{z=3} \cdot (dxdy\mathbf{a}_z)$$

$$= -\int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=0} dydz + \int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=1} dydz - \int_0^3 \int_0^1 (D_y)_{y=0} dxdz + \int_0^3 \int_0^1 (D_y)_{y=2} dxdz$$

$$= \int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=1} dydz$$

$$= \int_0^3 \int_0^2 2\,ydydz = \int_0^3 4\,dz = 12$$

- (b) From divergence theorem

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2) = 2y$$

$$\therefore \int_{vol} \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \int_{z=0}^{3} \int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{1} 2\, ydxdydz$$

$$= \int_{0}^{3} \int_{0}^{2} 2\, ydydz$$

$$= \int_{0}^{3} 4\, dz$$

$$= 12$$