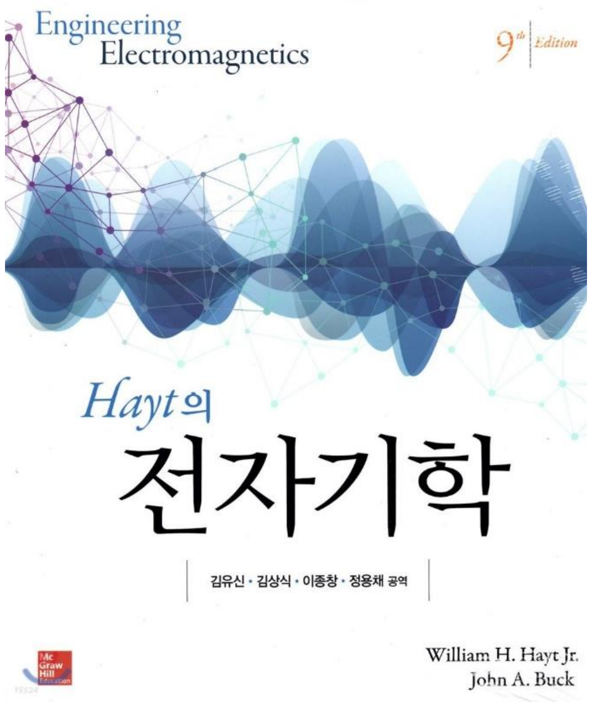
전기자기학 I

(강의자료 #4)



교과목명 : 전기자기학 I

담당교수 : 이 수 형

E-mail : soohyong@uu.ac.kr

교재명 : Hayt의 전자기학

Ch. 4. 에너지와 전위

CH. 4 : 에너지와 전위

- 목적 : 전위(전위계)를 정의하고 이를 이용해 전계를 구한다.

1) 전계 내에서 점전하를 이동시키는 데 소요되는 에너지

2) 선적분

3) 전위차 및 전위의 정의

4) 점전하에 의한 전위

5) 전하 시스템의 전위계; 보존적 성질

6) 전위 경도

7) 전기쌍극자

8) 정전계 내의 에너지밀도

4.1 전계내에서 점전하를 이동시키는데 소요되는 에너지

- 전계의 세기($\mathbf{E}$; electric field intensity)
  - 전계 내의 단위시험전하에 작용하는 힘
- 전계 $\mathbf{E}$ 내에서 전하 Q를 한 점에서 다른 점까지 이동시킬 때 필요한 에너지;

전계에 의해서 Q에 작용하는 힘 : $\mathbf{F}_E = Q\mathbf{E}$

→ 이 힘의 $d\mathbf{L}$ 방향의 성분 : $F_{EL} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{a}_L = Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_L$

→ 전하를 이동시키기 위하여 전하에 가해야 할 힘 : $F_{appl} = -F_{EL} = -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_L$

→ 전하를 이동시키는데 필요한 에너지(일=힘×거리) : $dW = -Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$

$$\rightarrow \;\therefore W = \int_{\mathrm{init}}^{final} dW = -Q\int_{\mathrm{init}}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad [\mathrm{J, joule}]$$

4.1 전계내에서 점전하를 이동시키는데 소요되는 에너지

$$W = \int_{\text{init}}^{final} dW = -Q\int_{\text{init}}^{final} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$$

여기서, $d\mathbf{L} = \mathbf{a}_L dL$

$= dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$(직각좌표계)

$= dr\mathbf{a}_r + \rho d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z$(원통좌표계)

$= dr\mathbf{a}_r + rd\theta\mathbf{a}_\theta + r\sin\theta\, d\phi\mathbf{a}_\phi$(구좌표계)

4.1 전계내에서 점전하를 이동시키는데 소요되는 에너지

- (ex 1) $\mathbf{E} = \left(\frac{x}{2} + 2y\right)\mathbf{a}_x + 2x\mathbf{a}_y[\mathrm{V/m}]$에 점전하 $Q = -20[\mu\mathrm{C}]$가 위치, 전하 Q를 점 $O(0,0,0)$에서 점$P(4,0,0)$까지 이동시키는데 필요한 일 W =?

$$W = -Q\int_{\mathrm{init}}^{final} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$$

$$= 20\times 10^{-6}\int_{O}^{P}\left[\left(\frac{x}{2} + 2y\right)\mathbf{a}_x + 2x\mathbf{a}_y\right]\cdot[dx\mathbf{a}_x]$$

$$= 20\times 10^{-6}\int_{0}^{4}\left(\frac{x}{2} + 2y\right)dx\bigg|_{y=0}$$

$$= 20\times 10^{-6}\cdot\left[\frac{x^2}{4} + 0\right]_{x=0}^{x=4}$$

$$= 80\ [\mu J]$$

- (예제 4.1) $\mathbf{E} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$[V/m]에 점전하 $Q = 2C$가 위치, 전하 Q를 점 $B(1,0,1)$에서 점 $A(0.8,0.6,1)$까지 $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1$인 원의 원호를 따라 이동시키는데 필요한 일 W =?

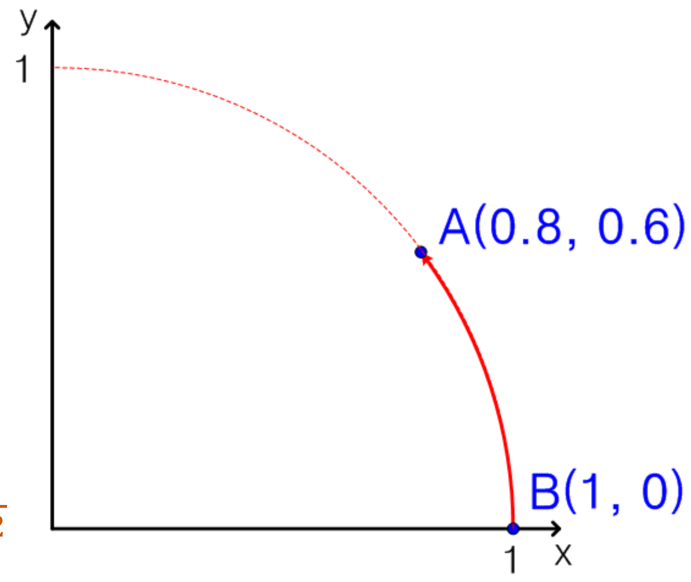
$$W = -Q\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$$

$$= -2\int_B^A (y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z)\cdot(dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z)$$

$$= -2\int_B^A (ydx + xdy + 2dz)$$

$$= -2\left(\int_1^{0.8} y\,dx + \int_0^{0.6} x\,dy + \int_1^1 2\,dz\right) \quad \leftarrow y = \sqrt{1-x^2}, x = \sqrt{1-y^2}$$

$$= -2\left(\int_1^{0.8}\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_0^{0.6}\sqrt{1-y^2}\,dy + 0\right)$$



4.2 선적분

$$W = -Q\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$$

$$= -2\left(\int_1^{0.8}\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_0^{0.6}\sqrt{1-y^2}\,dy + 0\right)$$

$$\leftarrow \quad \int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= -\left[x\sqrt{1-x^2} - \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]_1^{0.8} - \left[y\sqrt{1-y^2} - \tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right]_0^{0.6}$$

$$= -\left[\left(0.8\times\frac{3}{5} + 0.927\right) - (0+1.571)\right] - \left[\left(0.6\times\frac{4}{5} + 0.644\right) - (0+0)\right]$$

$$= -0.96 \ \ [\mathrm{J}]$$

4.2 선적분

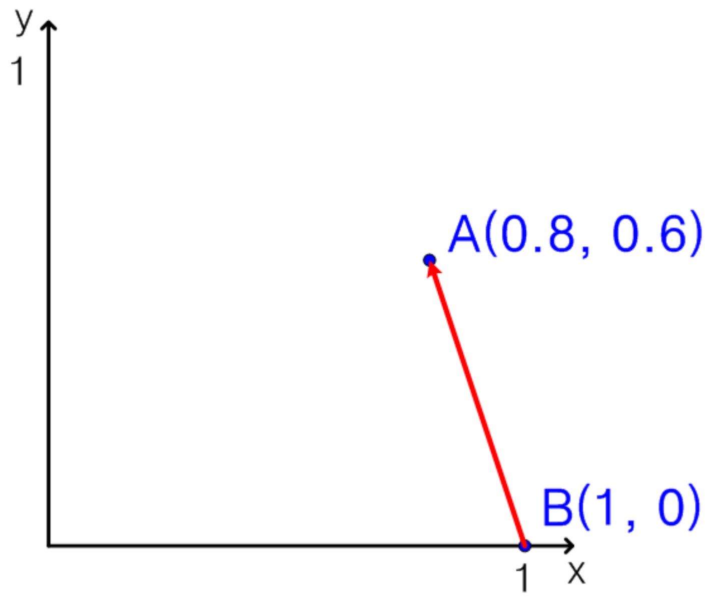
- (예제 4.2) $\mathbf{E} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z [\mathrm{V/m}]$ 에 점전하 $Q = 2[C]$가 위치, 전하 Q를 점 $B(1,0,1)$에서 점 $A(0.8,0.6,1)$까지 직선을 따라 이동시키는데 필요한 일 W =?

❖ 점$A(0.8,0.6)$와 점$B(1,0)$를 잇는 직선의 방정식

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{0.6 - 0}{0.8 - 1}(x - 1)$$

$$y = -3(x - 1)$$



$$W = -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$= -2 \int_B^A (y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z) \cdot (dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z) = -2 \int_B^A (ydx + xdy + 2dz)$$

$$= -2\left(\int_1^{0.8} y\,dx + \int_0^{0.6} x\,dy + \int_1^1 2\,dz\right)$$

4.2 선적분

$$W = -Q\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$$

$$= -2\left(\int_1^{0.8} y\,dx + \int_0^{0.6} x\,dy + \int_1^{1} 2\,dz\right)$$

$$\leftarrow y = -3x + 3, x = -\frac{1}{3}y + 1$$

$$= -2\left(\int_1^{0.8}(-3x+3)dx + \int_0^{0.6}(-\frac{1}{3}y+1)dy + 0\right)$$

$$= -2\left(\left[-\frac{3}{2}x^2 + 3x\right]_1^{0.8} + \left[-\frac{1}{6}y^2 + y\right]_0^{0.6}\right)$$

$$= -2([1.44 - 1.5] + [0.54 - 0])$$

$$= -0.96[J]$$

4.2 선적분

- (ex 2) z축을 따라 선전하 ρ_L, 전하 Q가 반지름 ρ_1인 원을 따라 일주하는데 필요한 일 W =?

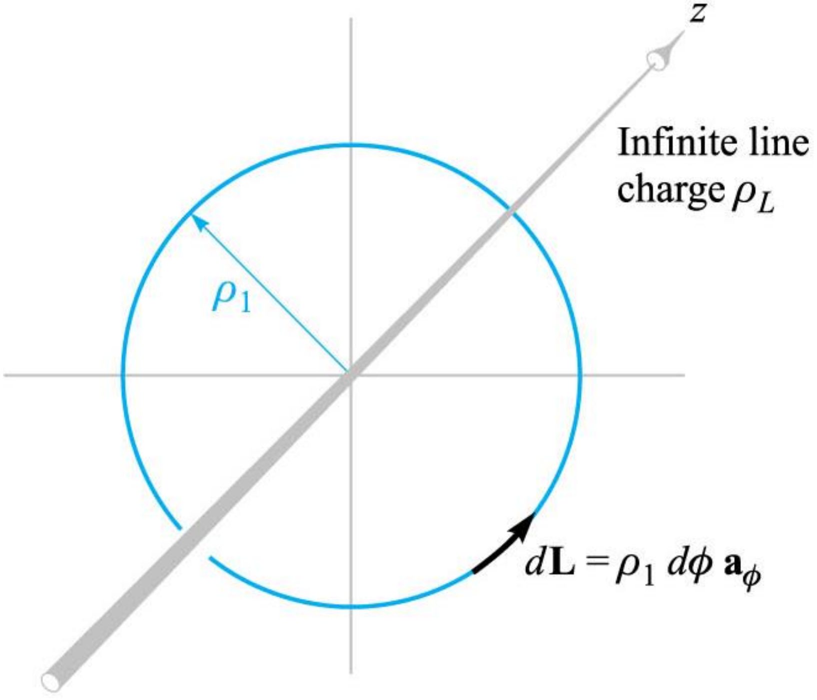
  - 선전하 ρ_L에 의한 전계

$$\mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 \rho}\mathbf{a}_\rho$$

$$W = -Q\int_{\text{init}}^{final} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$$

$$= -Q\int_B^B \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho \cdot (d\rho\mathbf{a}_\rho + \rho d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z)$$

$$= -Q\int_0^{2\pi} \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} d\phi \mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$$



4.2 선적분

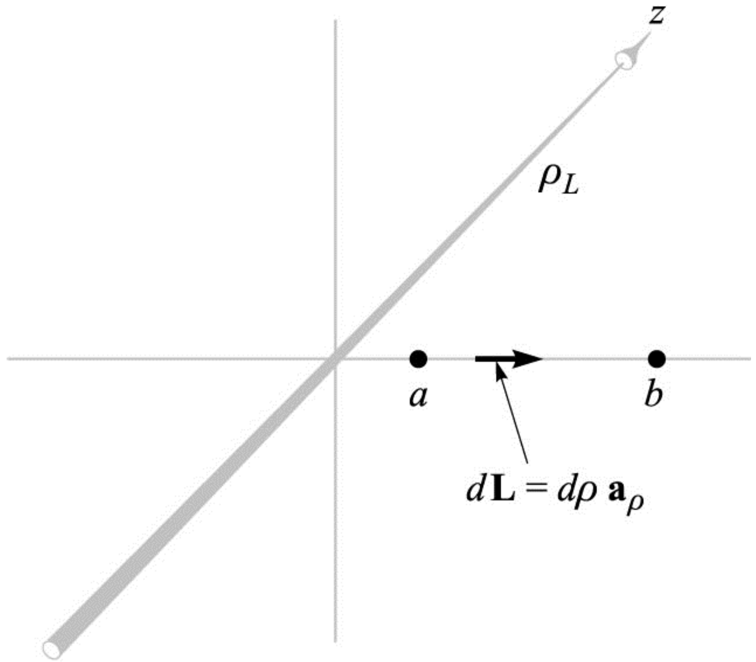
- (ex 3) z축을 따라 선전하 ρ_L, 전하 Q; $B(\rho = a, \phi = 0, z = 0) \rightarrow A(\rho = b, \phi = 0, z = 0)$, W =?

$$W = -Q\int_{init}^{final} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$$

$$= -Q\int_{B}^{A} \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho \cdot (d\rho\mathbf{a}_\rho + \rho d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z)$$

$$= -Q\int_{a}^{b} \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}d\rho$$

$$= -Q\left[\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho\right]_a^b = -\frac{Q\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}[\ln b - \ln a] = -\frac{Q\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}\ \ [\mathrm{J}]$$



- (ex 4) z축을 따라 선전하 ρ_L, 전하 Q; $B(\rho = b, \phi = 0, z = 0) \rightarrow A(\rho = a, \phi = 0, z = 0)$, W =?

$$W = -Q \int_{init}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$= -Q \int_{B}^{A} \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho \cdot (d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z)$$

$$= -Q \int_{b}^{a} \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\rho} d\rho$$

$$= -Q \left[\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \ln \rho \right]_b^a = -\frac{Q\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} [\ln a - \ln b]$$

$$= -\frac{Q\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{a}{b} \quad or \quad \frac{Q\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{b}{a} \quad [\mathrm{J}]$$

4.3 전위차 및 전위의 정의

- 전위차 (Potential difference)
  - 단위시험전하를 점 B에서 점 A까지 이동시키는데 필요한 일
  - 전위차 V_{AB}

$$V_{AB} = \frac{W}{Q} = -\int_{\mathrm{init}}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$= -\int_{B}^{A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad [\mathrm{V, volt}] = [\mathrm{J/C, joule/coulomb}]$$

- 전위(potential) 또는 절대전위; 전위가 영인 기준점에 대한 특정 점의 전위차
  - 점 B에 대한 점 A의 전위차; $\boxed{V_{AB} = V_A - V_B}$

- (ex 5) z축을 따라 선전하 ρ_L, 점$B(\rho = b, 0,0)$에 대한 점$A(\rho = a, 0,0)$의 전위차 V_{ab} =?

  - 선전하 ρ_L에 의한 전계

$$\mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 \rho}\mathbf{a}_\rho$$

$$V_{ab} = -\int_{init}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$= -\int_B^A \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho \cdot (dr\mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z) = -\int_b^a \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}d\rho$$

$$= -\left[\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho\right]_b^a = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}[\ln a - \ln b]$$

$$= -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{b} \quad or \quad \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} \quad [\mathrm{V}]$$

4.3 전위차 및 전위의 정의

- (ex 6) 원점에 점전하 Q, 점$B(r = r_B, 0,0)$와 점$A(r = r_A, 0,0)$의 전위차 V_{AB} =?
  - 점전하 Q에 의한 전계

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathbf{a}_r$$

$$V_{AB} = -\int_{init}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$= -\int_B^A \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r \cdot (dr\mathbf{a}_r + rd\theta\mathbf{a}_\theta + r\sin\theta\, d\phi\mathbf{a}_\phi)$$

$$= -\int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_B}^{r_A}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} = V_A - V_B$$

- (ex 7) $\mathbf{E} = -\frac{6y}{x^2}\mathbf{a}_x + \frac{6}{x}\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$ [V/m]
  - (a) 점 $P(-7,2,1)$와 점 $Q(4,1,2)$ 사이의 전위차 V_{PQ} =?

경로; $Q(4,1,2) \rightarrow R_1(-7,1,2) \rightarrow R_2(-7,2,2) \rightarrow P(-7,2,1)$

$$V_{PQ} = -\int_{init}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$= -\int_Q^P \left(-\frac{6y}{x^2}\mathbf{a}_x + \frac{6}{x}\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z\right) \cdot (dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z)$$

$$= -\left(\int_Q^{R_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_{R_2}^{P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}\right)$$

4.3 전위차 및 전위의 정의

$$V_{PQ} = -\left(\int_{Q}^{R_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_{R_2}^{P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}\right)$$

$$= -\int_{4}^{-7} \left(-\frac{6y}{x^2}\right) dx \bigg|_{y=1} - \int_{1}^{2} \frac{6}{x} dy \bigg|_{x=-7} - \int_{2}^{1} 5\, dz$$

$$= \int_{4}^{-7} \frac{6}{x^2} dx + \int_{1}^{2} \frac{6}{7} dy - \int_{2}^{1} 5\, dz$$

$$= 6\left[-\frac{1}{x}\right]_4^{-7} + \frac{6}{7}[y]_1^2 - 5[z]_2^1$$

$$= 6\left[\frac{1}{7} + \frac{1}{4}\right] + \frac{6}{7}[2-1] - 5[1-2] = 8.214 \ \ [\mathrm{V}]$$

4.3 전위차 및 전위의 정의

- $(b)\ V_Q = 0 \rightarrow V_P = ?$

$V_{PQ} = V_P - V_Q$

$\therefore V_P = V_Q + V_{PQ}$

$\quad = 0 + 8.214 = 8.214\ [\mathrm{V}]$

- $(c)\ V_R = 0$ where $R(2,0,-1) \rightarrow V_P = ?$ where $P(-7,2,1)$

경로; $R(2,0,-1) \rightarrow T_1(-7,0,-1) \rightarrow T_2(-7,2,-1) \rightarrow P(-7,2,1)$

$$V_P = V_R + V_{PR}$$

$$= V_{PR} = -\int_{init}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$= -\int_R^P \left(-\frac{6y}{x^2}\mathbf{a}_x + \frac{6}{x}\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z\right) \cdot \left(dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z\right)$$

$$V_P = V_R + V_{PR} = V_{PR} = -\int_{\text{init}}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_R^P \left(-\frac{6y}{x^2}\mathbf{a}_x + \frac{6}{x}\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z\right) \cdot \left(dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z\right)$$

$$= -\left(\int_R^{T_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_{T_2}^{P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}\right)$$

$$= -\int_2^{-7} \left(-\frac{6y}{x^2}\right) dx \bigg|_{y=0} - \int_0^2 \frac{6}{x} dy \bigg|_{x=-7} - \int_{-1}^{1} 5\, dz$$

$$= \int_0^2 \frac{6}{7} dy - \int_{-1}^{1} 5\, dz$$

$$= \frac{6}{7}[y]_0^2 - 5[z]_{-1}^1$$

$$= \frac{6}{7}[2-0] - 5[1+1] = -8.286\ [\mathrm{V}]$$

4.4 점전하에 의한 전위

- 점전하 Q에 의한 전계

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathbf{a}_r \ \ [\mathrm{V/m}]$$

- 원점에 점전하 Q가 위치할 때, $r = r_A$인 점과 $r = r_B$인 점 사이의 전위차 V_{AB}

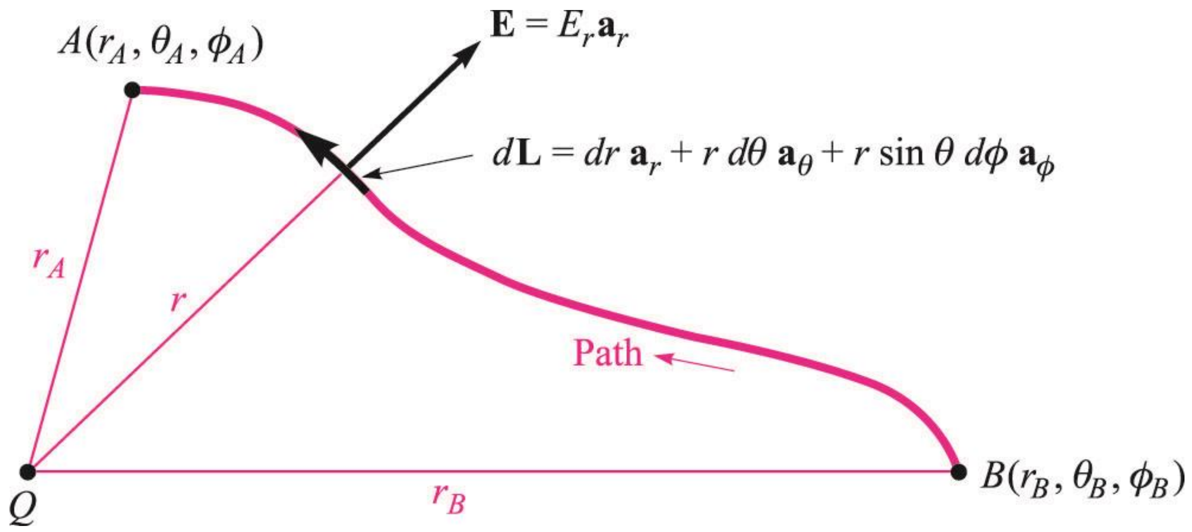
$$V_{AB} = -\int_{init}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$= -\int_{B}^{A} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r \cdot (d\rho\mathbf{a}_r + rd\theta\mathbf{a}_\theta + r\sin\theta\, d\phi\mathbf{a}_\phi)$$

$$= -\int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_B}^{r_A}$$

$$\boxed{V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right] \ [\mathrm{V}]}$$



4.4 점전하에 의한 전위

- 점전하 Q가 원점에 위치할 때, $r = \infty$인 곳을 영전위 기준점으로 정할 경우 점 A에서의 전위 V_A

$$V_A = V_{A\infty} - V_\infty$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{\infty}\right) + 0$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} \quad [\mathrm{V}]$$

물리적 의미 : 1C의 전하를 무한원점으로부터 r만큼 떨어진 점까지 이동하기 위해서 해 주어야 하는 일

- 점전하 Q가 원점에 위치할 때, 원점에서의 거리가 r인 곳에서의 전위 V

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad [\mathrm{V}]$$

4.4 점전하에 의한 전위

- (ex 8) $Q = 6nC$ at $O(0,0,0)$, $V_P = ?$, where $P(0.2, -0.4, 0.4)$
  - $(a)\ V_\infty = 0,$

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$= \frac{6 \times 10^{-9}}{4\pi \times 136\pi \times 10^{-9} \times \sqrt{0.2^2 + (-0.4)^2 + 0.4^2}}$$

$$= \frac{54}{\sqrt{0.36}} = 90 \quad [\mathrm{V}]$$

4.4 점전하에 의한 전위

- $(b)\ V_Q = 0$, where $Q(1,0,0)$

$$V_P = V_{QP} + V_Q = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q}\right) + 0$$

$$= \frac{6\times10^{-9}}{4\pi\times136\pi\times10^{-9}}\left(\frac{1}{0.36} - 1\right) = 36\ \ [V]$$

- $(c)\ V_R = 20$, where $R(-0.5,1,-1)$

$$V_P = V_{PR} + V_R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_R}\right) + 20$$

$$= \frac{6\times10^{-9}}{4\pi\times136\pi\times10^{-9}}\left(\frac{1}{0.6} - \frac{1}{\sqrt{(-0.5)^2 + 1^2 + (-1)^2}}\right) + 20$$

$$= 54\left(\frac{1}{0.6} - \frac{1}{1.5}\right) = 74\ \ [V]$$

4.5 전하 시스템의 전위계: 보전적 성질

- 점의 위치 $\mathbf{r}_1$ 에 놓여진 점전하 Q_1에 의한 $\mathbf{r}$위치에서의 전위

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}$$

- 점의 위치 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 에 놓여진 점전하 Q_1, Q_2에 의한 $\mathbf{r}$위치에서의 전위

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}$$

- n개의 점전하에 의한 경우

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|} + \cdots + \frac{Q_n}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_n|} \quad \Rightarrow \quad V(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_m}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_m|}$$

- 임의의 전하분포에 따른 전위

$$V(\mathbf{r}) = \int_{vol} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')dv'}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

4.5 전하 시스템의 전위계: 보전적 성질

- 전위차;

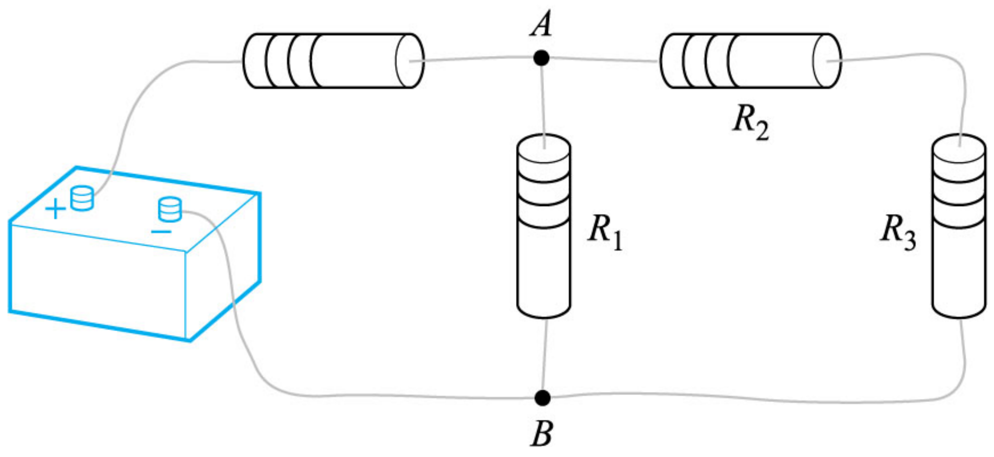
$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

  - 무한원점을 영전위 기준점으로 할 경우

$$V_A = -\int_\infty^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

- 보존계(conservative field); 폐곡선에 대한 선적분이 0
  - $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$ → 이동경로와는 무관

    → Kirchhoff의 전압법칙



4.5 전하 시스템의 전위계: 보전적 성질

- (ex 9) $V_\infty = 0, V_P = ?$, where $P(0,0,10)$
  - $(a)\ Q = 20\ \ [\mathrm{nC}]$ at $O(0,0,0)$

$$V_P = V_{P\infty} + V_\infty$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$= \frac{20 \times 10^{-9}}{4\pi \times 136\pi \times 10^{-9} \times 10} = 18\ \ [\mathrm{V}]$$

4.5 전하 시스템의 전위계: 보전적 성질

➢ $(b)\ \rho_L = 10\ [\mathrm{nC/m}]$ at $x = 0,\ z = 0,\ -1 < y < 1$

$$V = \int_{vol} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')dv'}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int_l \frac{\rho_L(\mathbf{r}')dl'}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{\rho_L dy'}{4\pi\varepsilon_0\left|10\mathbf{a}_z - y'\mathbf{a}_y\right|}$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{\rho_L dy'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{10^2 + y'^2}} \quad \leftarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$$

$$= \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(y' + \sqrt{10^2 + y'^2}\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{10 \times 10^{-9}}{4\pi \times 136\pi \times 10^{-9}}\left[\ln\left(1 + \sqrt{101}\right) - \ln\left(-1 + \sqrt{101}\right)\right]$$

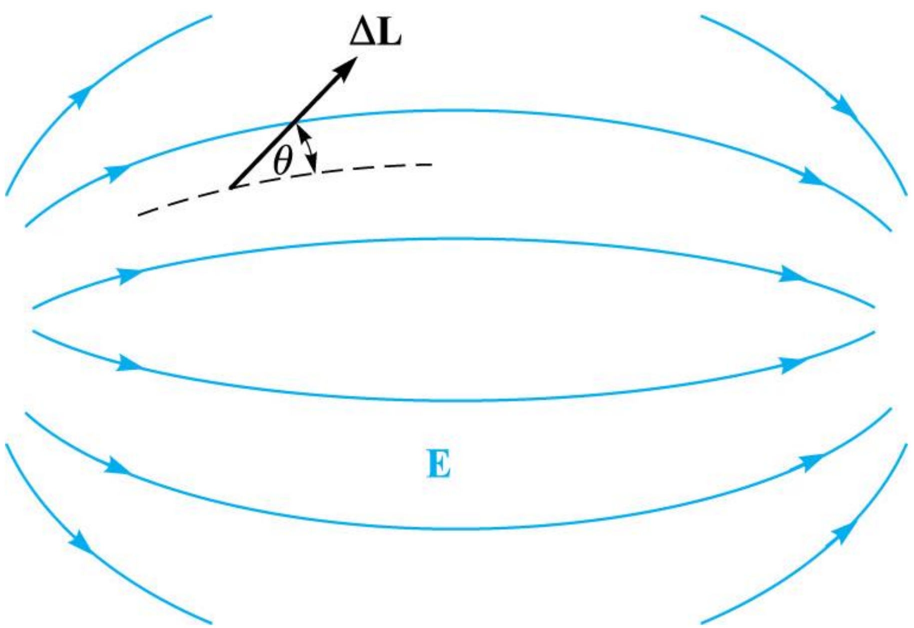
$$= 10 \times 9 \times \ln\frac{\sqrt{101} + 1}{\sqrt{101} - 1} = 17.97\ [V]$$

4.6 전위 경도

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad \Rightarrow \quad \Delta V \doteq -\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{L} \quad (\text{일정한 } \mathbf{E})$$

$$\Delta V \doteq -\boldsymbol{E} \cdot (\Delta\mathbf{L} \cdot \mathbf{a}_L)$$

$$= -E\Delta L \cos\theta$$



$$\frac{dV}{dL} = -E\cos\theta$$

$$\left.\frac{dV}{dL}\right|_{\max} = E \quad (\cos\theta = -1, \Delta\mathbf{L}\text{의 방향과 }\mathbf{E}\text{의 방향이 반대인 경우})$$

1) 세기의 크기는 거리에 대한 전위의 변화율의 최대값과 같다.
2) 전위의 변화율의 최대값은 **E**의 방향이 전위가 증가하는 방향과 반대일 때 얻어진다.

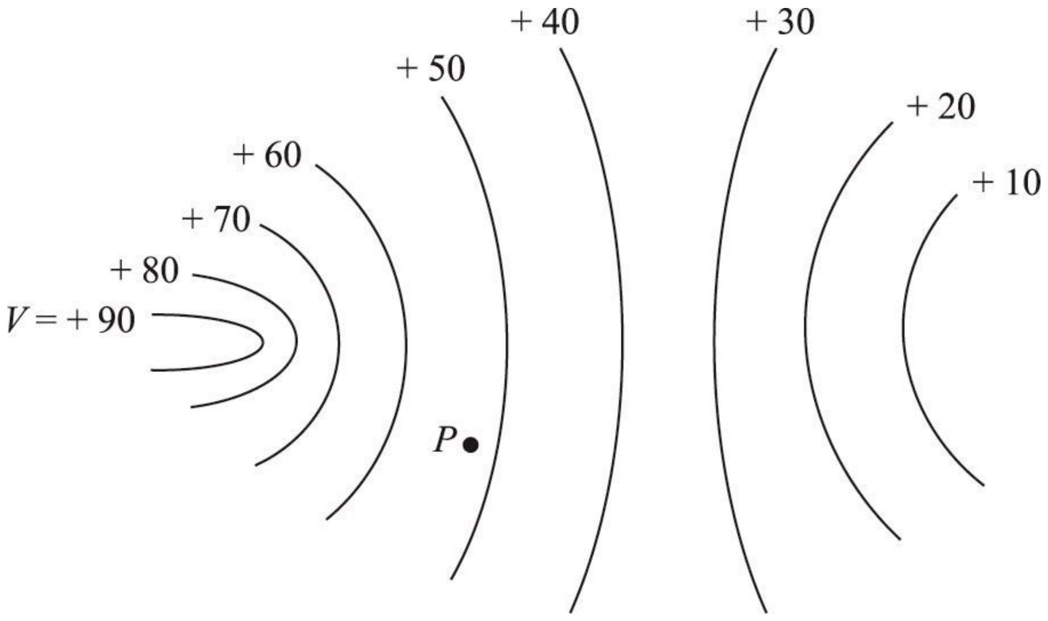
4.6 전위 경도

$$V = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} \quad \Rightarrow \quad \Delta V \doteq -\mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{L} \quad (\text{일정한 } \mathbf{E})$$

$$\Delta V \doteq -\boldsymbol{E}\cdot(\Delta\mathbf{L}\cdot\mathbf{a}_L) = -E\Delta L\cos\theta$$

$$\frac{dV}{dL} = -E\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{dV}{dL}\right|_{\max} = E \quad (\cos\theta = -1,)$$

$$\mathbf{E} = -\left.\frac{dV}{dL}\right|_{\max}\mathbf{a}_N = -\frac{dV}{dN}\mathbf{a}_N$$



ΔV가 일정한 선을 연결한 결과 : 등전위면

$\mathbf{E}$ 의 크기는 V 의 공간 내의 최대변화율과 같고, $\mathbf{E}$의 방향은 등전위면과 수직으로 전위가 감소하는 방향과 같다.

4.6 전위 경도

- 경도(Gradient)

  - 일반적으로 스칼라 T로부터 벡터 기울기를 얻는 연산을 경도 또는 경도 또는 구배(gradient)라 부르고, 다음과 같이 정의한다.

$$T\text{의구배} = grad\ T = \frac{dT}{dN}\mathbf{a}_N$$

$$\boxed{\mathbf{E} = -grad\ V}$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$dV = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

$$\rightarrow\ E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},\qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\boxed{\therefore\ \mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z\right)V = -\nabla V = -grad\ V}$$

4.6 전위 경도

- 전위경도의 계산

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \text{ (직각좌표계)}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_x + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \text{ (원통좌표계)}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_x + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_y + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_z \text{ (구좌표계)}$$

- 발산(divergence) : 벡터 → 스칼라
- 경도 (gradient) : 스칼라 → 벡터

- (ex 7) $V = 2x^2y - 5z$

  - (a) V =? at $P(-4,3,6)$

    $V_P = 2(-4)^2(3) - 5(6) = 66\ [V]$

  - (b)전계의 세기$\mathbf{E}$의 크기와 방향 at $P(-4,3,6)$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right) = -4xy\mathbf{a}_x - 2x^2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z\ \ [V/m]$$

$$\mathbf{E}_P = 48\mathbf{a}_x - 32\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z[V/m]$$

$$|\mathbf{E}_P| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{48^2 + (-32)^2 + 5^2} = 57.9\ \ [V/m]$$

$$\mathbf{a}_{E,P} = \frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|} = \frac{48\mathbf{a}_x - 32\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z}{57.9} = 0.829\mathbf{a}_x - 0.553\mathbf{a}_y + 0.086\mathbf{a}_z$$

4.6 전위 경도

- (ex 7) $V = 2x^2y - 5z$
  - (c)자유공간에서의 전속밀도$\mathbf{D}$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} = (8.854 \times 10^{-12}) \cdot \left(-4xy\mathbf{a}_x - 2x^2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z\right)$$

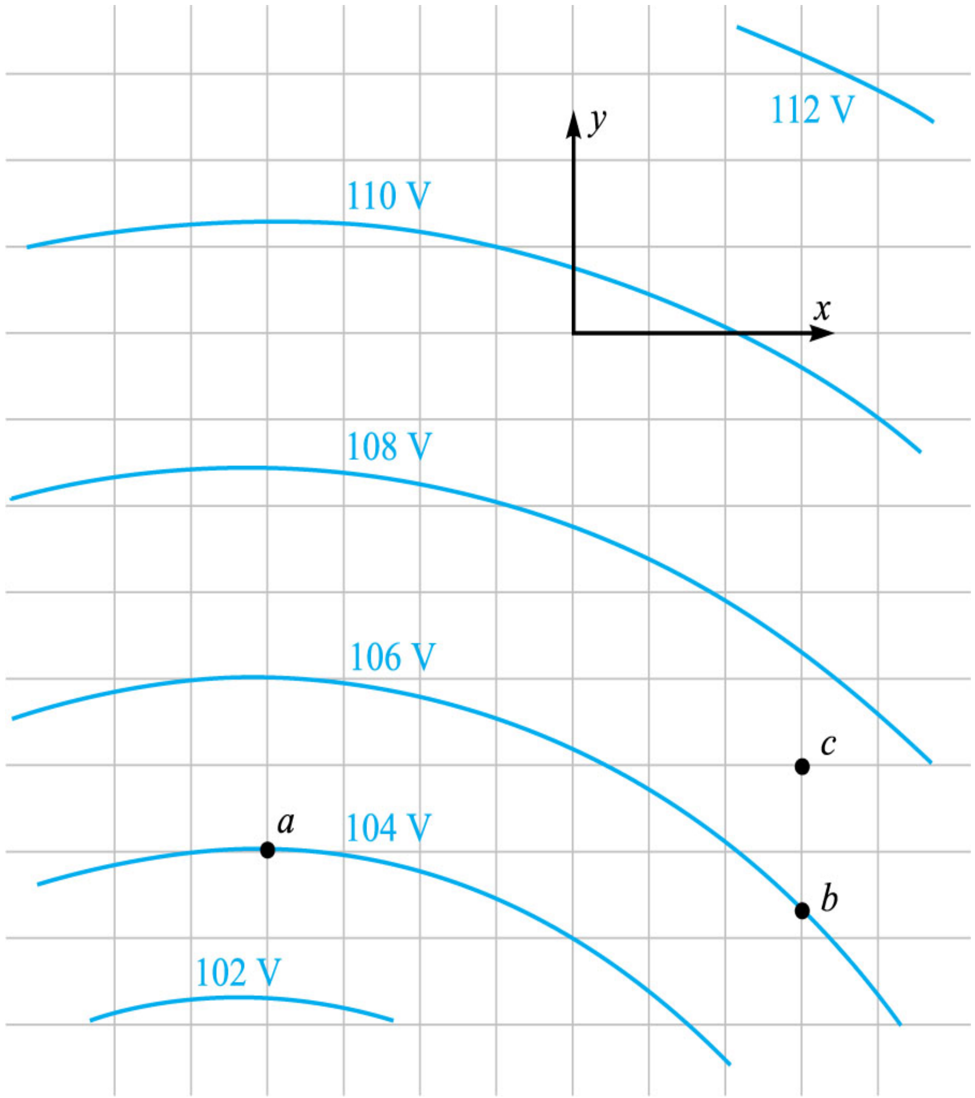
$$= -35.4xy\mathbf{a}_x - 17.71x^2\mathbf{a}_y + 44.3\mathbf{a}_z \ \ [pC/m^2]$$

  - (d)전계를 만들어 낸 원인(체적전하밀도)

$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial Dx}{\partial x} + \frac{\partial Dy}{\partial y} + \frac{\partial Dz}{\partial z} = -35.4y \ \ [pC/m^3]$$

4.6 전위 경도

- (ex 14) 101쪽 응용예제 4.7
  - V at a, b, c



- (ex 15) 101쪽 예제 4.8

$$V = \frac{(60\sin\theta)}{r^2}[V], \qquad P(r = 3m, \theta = 60^o, \phi = 25^o)$$

$$(a)\ \ V_P = \frac{60\sin 60^o}{3^2} = 5.773[V]$$

$$(b)\ \ \mathbf{E}_P = -\nabla V\Big|_P = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_x + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\mathbf{a}_y + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\mathbf{a}_z\right)\Bigg|_P = -\left((-2)\cdot\frac{60\sin\theta}{r^3}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{60\cos\theta}{r^2}\mathbf{a}_\theta\right)\Bigg|_P$$

$$= \frac{2\times 60\sin 60^o}{3^3}\mathbf{a}_r - \frac{60\cos 60^o}{3^3}\mathbf{a}_\theta = 3.85\mathbf{a}_r - 1.11\mathbf{a}_\theta[V/m]$$

$(c)\ \frac{dV}{dN}$ at P

$$\frac{dV}{dN}\bigg|_P = |\mathbf{E}_P| = \sqrt{3.85^2 + (-1.11)^2} = 4.006[V/m]$$

- (d) 점 P에서 $\mathbf{a}_N$

$$\mathbf{a}_{N,P} = -\mathbf{a}_{E,P} = -\frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|}\bigg|_P = -\frac{3.85\mathbf{a}_r - 1.11\mathbf{a}_\theta}{4.01} = -0.96\mathbf{a}_r + 0.277\mathbf{a}_\theta$$

- (e) 점 P에서 ρ_v

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} = 120\varepsilon_0\frac{\sin\theta}{r^3}\mathbf{a}_r - 60\varepsilon_0\frac{\cos\theta}{r^3}\mathbf{a}_\theta$$

$$\rho_v\Big|_P = \nabla\cdot\mathbf{D}\Big|_P = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, D_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}\bigg|_P$$

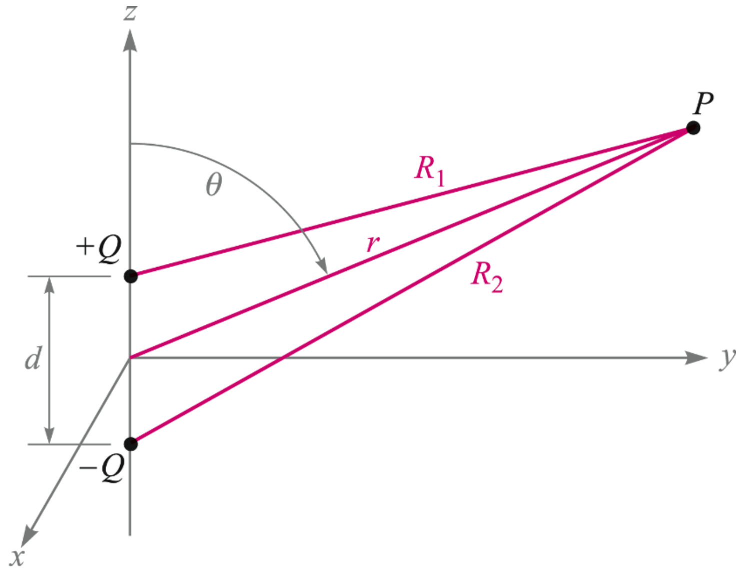
$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{120\varepsilon_0\sin\theta}{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{-60\varepsilon_0\sin\theta\cos\theta}{r^3}\bigg|_P = -\frac{120\varepsilon_0\sin\theta}{r^4} - \frac{60\varepsilon_0}{r^4\sin\theta}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\bigg|_P$$

$$= -\frac{60\varepsilon_0}{r^4}\left[2\sin\theta + \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta}\right]\bigg|_P = -\frac{60\times 8.854\times 10^{-12}}{3^4}\left[2\times\sin 60^o - \frac{\cos^2 60^o - \sin^2 60^o}{\sin 60^o}\right]$$

$$= -7.57[pC/m^3]$$

- 전기쌍극자(electric dipole)
  - 전계 및 전위계를 구하고자 하는 점 P까지의 거리에 비해 적은 거리로 서로 떨어져 있는 크기가 같고 부호가 반대인 두 점전하가 하나의 입자처럼 행동

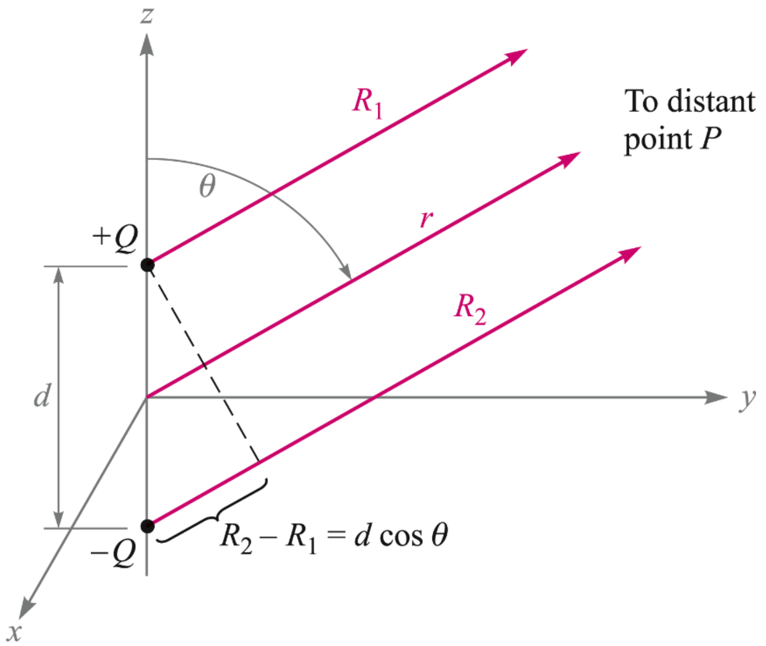
$$V = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$



  - 멀리 떨어져 있는 점에서

$$R_1 R_2 \cong r^2 \quad and \quad R_2 - R_1 \cong d\cos\theta$$

$$\boxed{V = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$



4.8 정전계 내의 에너지밀도

- 한 양전하를 무한원점으로부터 다른 양전하의 전계 내로 가져오기 위해서는 외부로부터 일을 해주어야 한다.
- 한 전하계 내에 있는 위치에너지를 구하기 위해서는 전하들을 그 위치까지 가져오는데 외부로부터 해 주어야 할 일을 구한다.
  - Q_2를 가져오는 데 사용하는 일 $= Q_2V_{2,1}$
  - Q_3를 가져오는 데 사용하는 일 $= Q_3V_{3,1} + Q_3V_{3,2}$
  - Q_4를 가져오는 데 사용하는 일 $= Q_4V_{4,1} + Q_4V_{4,2} + Q_4V_{4,3}$
  - $W_E = Q_2V_{2,1} + Q_3V_{3,1} + Q_3V_{3,2} + Q_4V_{4,1} + Q_4V_{4,2} + Q_4V_{4,3} + \cdots$
  - $W_E = Q_1V_{1,2} + Q_1V_{1,3} + Q_2V_{2,3} + Q_1V_{1,4} + Q_2V_{2,4} + Q_3V_{3,4} + \cdots$

$$Q_3V_{3,1} = Q_3\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{13}} = Q_1\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_{31}} = Q_1V_{1,3}$$

4.8 정전계 내의 에너지밀도

$$Q_3V_{3,1} = Q_3\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{13}} = Q_1\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_{31}} = Q_1V_{1,3}$$

$$W_E = Q_2V_{2,1} + Q_3V_{3,1} + Q_3V_{3,2} + Q_4V_{4,1} + Q_4V_{4,2} + Q_4V_{4,3} + \cdots$$

$$W_E = Q_1V_{1,2} + Q_1V_{1,3} + Q_2V_{2,3} + Q_1V_{1,4} + Q_2V_{2,4} + Q_3V_{3,4} + \cdots$$

$$2W_E = Q_1\left(V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \cdots\right) + Q_2\left(V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \cdots\right) + Q_3\left(V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \cdots\right) + \cdots$$

$$W_E = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3 + \cdots) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N} Q_mV_m = \frac{1}{2}\int_{vol}\rho_v V\,dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_{vol}(\nabla\cdot\mathbf{D})V\,dV = \frac{1}{2}\int_{vol}[\nabla\cdot(V\mathbf{D}) - \mathbf{D}\cdot(\nabla V)]\,dV$$

$$= \frac{1}{2}\oint_S (V\mathbf{D})\cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{2}\int_{vol}\mathbf{D}\cdot(\nabla V)dv$$

$$= 0 - \frac{1}{2}\int_{vol}\mathbf{D}\cdot(-\mathbf{E})dv = \frac{1}{2}\int_{vol}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv$$

$$\rho_v = \nabla\cdot\mathbf{D}$$

$$\nabla\cdot(VD) \equiv \nabla(\nabla\cdot D) + D\cdot(\nabla V)$$

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}\int_{vol}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv = \frac{1}{2}\int_{vol}\varepsilon_0 E^2\,dv}$$

4.8 정전계 내의 에너지밀도

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \rho_v V dv = \frac{1}{2}\int_{vol} \mathbf{D}\cdot\mathbf{E} dv = \frac{1}{2}\int_{vol} \varepsilon_0 E^2 dv$$

✓

- (ex 13) $W_E = ?$ in $0 < \rho < a$, $0 < \phi < \pi$, $0 < z < 2$

  - $(a)\ V = V_0 \frac{\rho}{a}$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right) = -\frac{V_0}{a}\mathbf{a}_\rho$$

$$\therefore W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \varepsilon_0 E^2 dv = \frac{1}{2}\int_0^2 \int_0^\pi \int_0^a \varepsilon_0 \frac{V_0^2}{a^2}\rho d\rho d\phi dz = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{V_0^2}{a^2} \times 2 \times \pi \times \frac{1}{2}\rho^2\Big]_0^a = \frac{\pi}{2}\varepsilon_0 V_0^2 [J]$$