Ch. 8. 자기력과 자성체, 그리고 인덕턴스

8장. 자기력과 자성체, 그리고 인덕턴스

1) 운동하는 전하에 작용하는 힘
2) 미소전류소에 작용하는 힘
3) 미소전류소 사이에 작용하는 힘
4) 폐회로에 작용하는 힘과 회전력
5) 자성체의 성질
6) 자화 및 투자율
7) 자계의 경계 조건
8) 자기회로
9) 자성체에서의 포텐셜에너지와 힘
10) 인덕턴스와 상호인덕턴스

8.1 운동하는 전하에 작용하는 힘

- 전하에 작용하는 힘
  - 전하 → 전계 → 정지 또는 움직이는 전하에 힘을 작용
  - 움직이는 전하(전류) → 자계 → 움직이는 전하에 힘을 작용
- 전계 내에서 대전입자가 받는 힘(전기력)
  - $\mathbf{F}_E = Q\mathbf{E}$ [N] where, Q[C]; 전하(대전입자), $\mathbf{E}$ [V/m]; 전계의 세기
- 자계 내에서 움직이는 대전입자가 받는 힘(자기력)
  - $\mathbf{F}_B = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ [N] where, $\mathbf{v}$ [m/s]; 전하의 이동속도, $\mathbf{B}$ [T] ; 자속밀도
- Lorentz 힘의 방정식 : 전기력 + 자기력

$$\boxed{\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})}$$

  - 시간에 대한 변화율이 일정한 전계
  - 직류전류

8.1 운동하는 전하에 작용하는 힘

- Ex 1) $Q = -40$ [nC], $\mathbf{v} = 6 \times 10^6\left(-0.48\mathbf{a}_x - 0.6\mathbf{a}_y + 0.64\mathbf{a}_z\right)$ [m/s]

(a) $\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$ [mT]

$$\mathbf{F}_B = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$= -40 \times 10^{-9} \times 6 \times 10^6(-0.48\mathbf{a}_x - 0.6\mathbf{a}_y + 0.64\mathbf{a}_z) \times (2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z) \times 10^{-3}$$

$$= -40 \times 10^{-6} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ -0.48 & -0.6 & 0.64 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -240 \times 10^{-6}\left\{(-0.6 \times 5 + 3 \times 0.64)\mathbf{a}_x + (0.64 \times 2 + 0.48 \times 5)\mathbf{a}_y + (3 \times 0.48 + 0.6 \times 2)\mathbf{a}_z)\right\}$$

$$= -240 \times 10^{-6}\left(-1.08\mathbf{a}_x + 3.68\mathbf{a}_y + 2.64\mathbf{a}_z\right)$$

$$\therefore F_B = -240 \times 10^{-6}\sqrt{1.08^2 + 3.68^2 + 2.64^2}$$

$$= -1117.4[\mu N]$$

8.1 운동하는 전하에 작용하는 힘

(b) $\mathbf{E} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$ [kV/m]

$$\mathbf{F}_E = Q\mathbf{E}$$

$$= -40 \times 10^{-9} \times \left(2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z\right) \times 10^3$$

$$= -40 \times 10^{-6} \times (2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z)$$

$$\therefore F_E = -40 \times 10^{-6}\sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2} = -246.6[\mu N]$$

(c) 전체 힘?

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B$$

$$= -240 \times 10^{-6}\left(-1.08\mathbf{a}_x + 3.68\mathbf{a}_y + 2.64a_z\right) - 40 \times 10^{-6} \times (2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z)$$

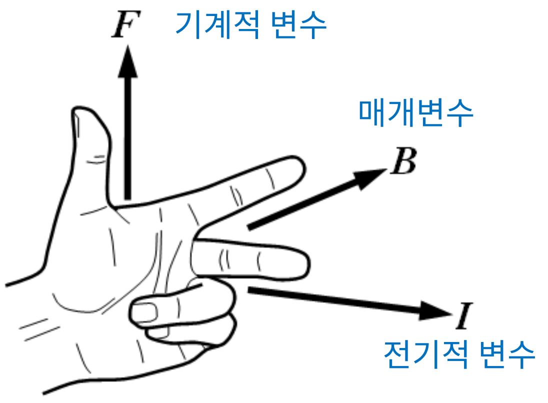
$$= -40 \times 10^{-6}\{6\left(-1.08\mathbf{a}_x + 3.68\mathbf{a}_y + 2.64a_z\right) + (2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z)\}$$

$$= -40 \times 10 - 6\left(-4.48\mathbf{a}_x + 19.08\mathbf{a}_y + 20.84\mathbf{a}_z\right)$$

$$\therefore F = -40 \times 10^{-6}\sqrt{4.48^2 + 19.08^2 + 20.84^2} = -1144.3[\mu N]$$

8.2 미소 전류소에 작용하는 힘

- 자계내에서 움직이는 대전입자가 받는 힘(자기력)
  - $\mathbf{F}_B = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

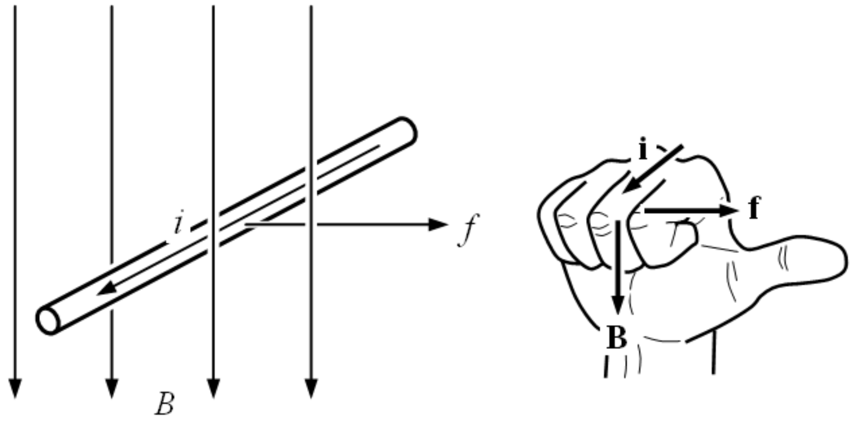


- 낙하하는 모래더미에 작용하는 중력 = Σ (모래알이 받는 힘)
- 전하가 불연속적으로 분포할 경우 $\mathbf{F} = \sum(d\mathbf{F})$

$$d\mathbf{F} = dQ\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \rho_v dv\mathbf{v} \times \mathbf{B} \leftarrow Q = \rho_v v$$
$$= \mathbf{J} \times \mathbf{B}dv \leftarrow \rho_v \mathbf{v}$$
$$= Id\mathbf{L} \times \mathbf{B} \leftarrow \mathbf{J}dv = \mathbf{K}dS = Id\mathbf{L}$$

$$\therefore \mathbf{F} = \int d\,\mathbf{F} = \oint I\,d\mathbf{L} \times \mathbf{B} = -I\oint \mathbf{B} \times d\mathbf{L}$$

- 균일 자계내에 있는 직선도체가 받는 힘
  - $\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$ 또는 $F = BIL\sin\theta$



8.2 미소 전류소에 작용하는 힘

- (예제 8.1) y축 위에 $I = 15$ [A]의 무한전류선소가 있을 때, $z = 0$ 평면 위의 2 [mA]가 흐르는 정사각형 루프가 받는 힘

$$\mathbf{F} = -I \oint \mathbf{B} \times d\mathbf{L}$$

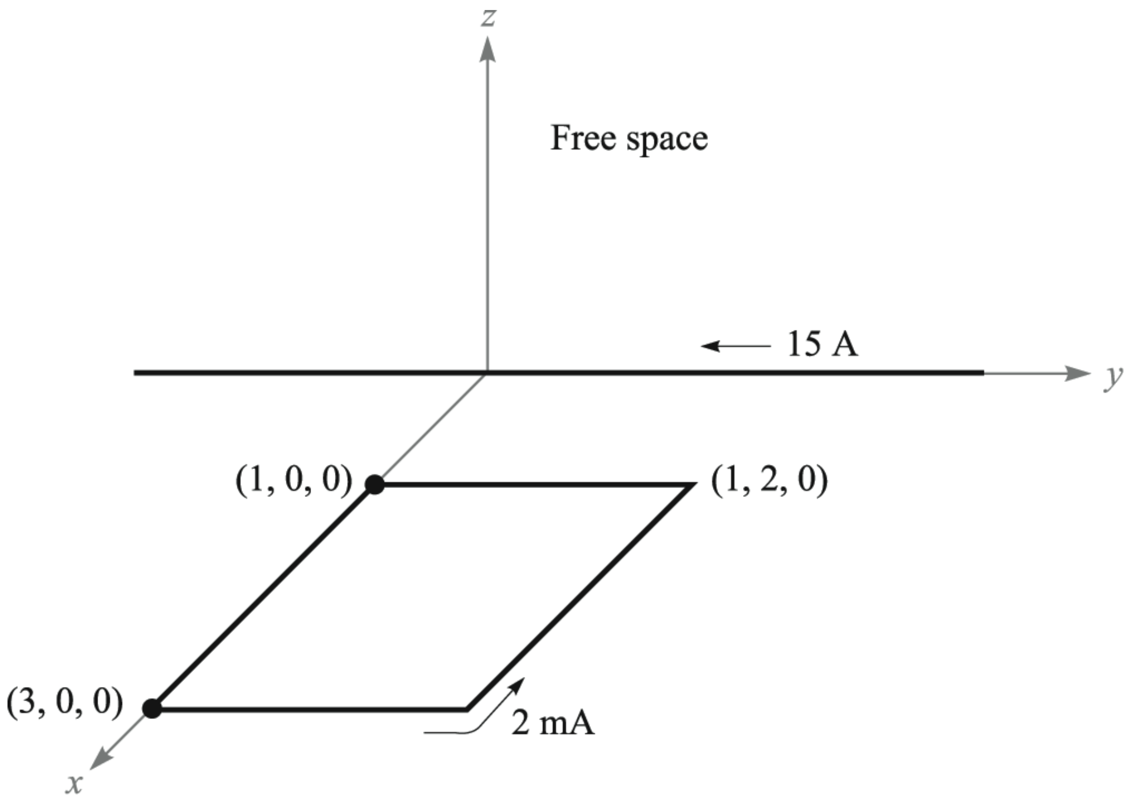
$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\rho = \frac{15}{2\pi x}\mathbf{a}_x [A/m]$$

$$\therefore \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

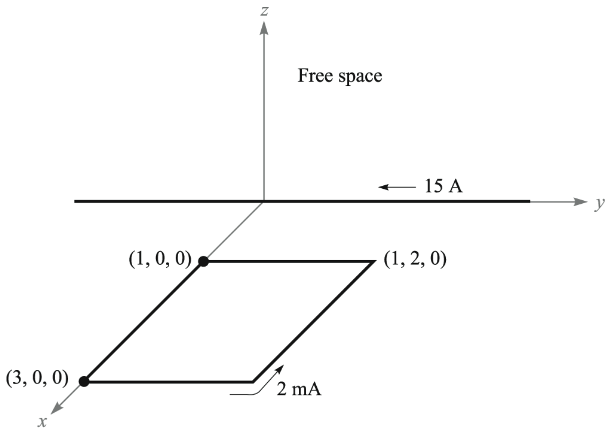
$$= 4\pi \times 10^{-7} \frac{15}{2\pi x}\mathbf{a}_z$$

$$= \frac{3 \times 10^{-6}}{x}\mathbf{a}_z [T]$$



8.2 미소 전류소에 작용하는 힘

- (예제 8.1) y축 위에 $I = 15$ [A]의 무한전류선소가 있을 때, $z = 0$ 평면 위의 2 [mA]가 흐르는 정사각형 루프가 받는 힘 (계속)



$$\therefore \mathbf{F} = -I \oint \mathbf{B} \times d\mathbf{L}$$

$$= -2 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-6} \left[\int_1^3 \frac{1}{x} \mathbf{a}_z \times dx\mathbf{a}_x + \int_0^2 \frac{1}{3} \mathbf{a}_z \times dy\mathbf{a}_y + \int_3^1 \frac{1}{x} \mathbf{a}_z \times dx\mathbf{a}_x + \int_2^0 \frac{1}{1} \mathbf{a}_z \times dy\mathbf{a}_y \right]$$

$$= -6 \times 10^{-9} \left[\frac{1}{3} \int_0^2 \mathbf{a}_z \times dy\mathbf{a}_y + \int_2^0 \mathbf{a}_z \times dy\mathbf{a}_y \right] = -6 \times 10^{-9} \left[\frac{1}{3} \int_0^2 dy\,(-\mathbf{a}_x) + \int_2^0 dy\,(-\mathbf{a}_x) \right]$$

$$= -6 \times 10^{-9} \left(-\frac{2}{3} + 2 \right) \mathbf{a}_x = -8 \times 10^{-9} \mathbf{a}_x [N] \quad or \quad -8\mathbf{a}_x [nN]$$

8.3 미소 전류소 사이에 작용하는 힘

- I_1, I_2

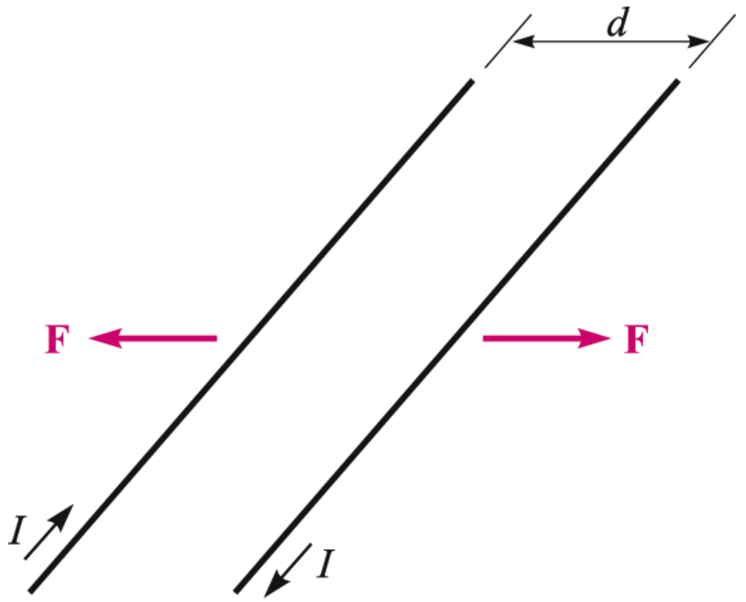
$\rightarrow H_1 = \frac{I_2}{2\pi\rho}$ (전류 I_1이 흐르고 있는 지점에서의 자계의 세기)

$H_2 = \frac{I_1}{2\pi\rho}$ (전류 I_2가 흐르고 있는 지점에서의 자계의 세기)

$\rightarrow B_1 = \mu_0 H_1 = \frac{\mu_0}{2\pi\rho} I_2$ (전류 I_1이 흐르고 있는 지점에서의 자속밀도)

$B_2 = \mu_0 H_2 = \frac{\mu_0}{2\pi\rho} I_1$ (전류 I_2가 흐르고 있는 지점에서의 자속밀도)

$\rightarrow \mathbf{F}_1 = I_1 \mathbf{L}_1 \times \mathbf{B}_1, \mathbf{F}_2 = I_2 \mathbf{L}_2 \times \mathbf{B}_2$



8.4 폐회로에 작용하는 힘과 회전력

- 균일 자계내의 폐회로가 받는 힘

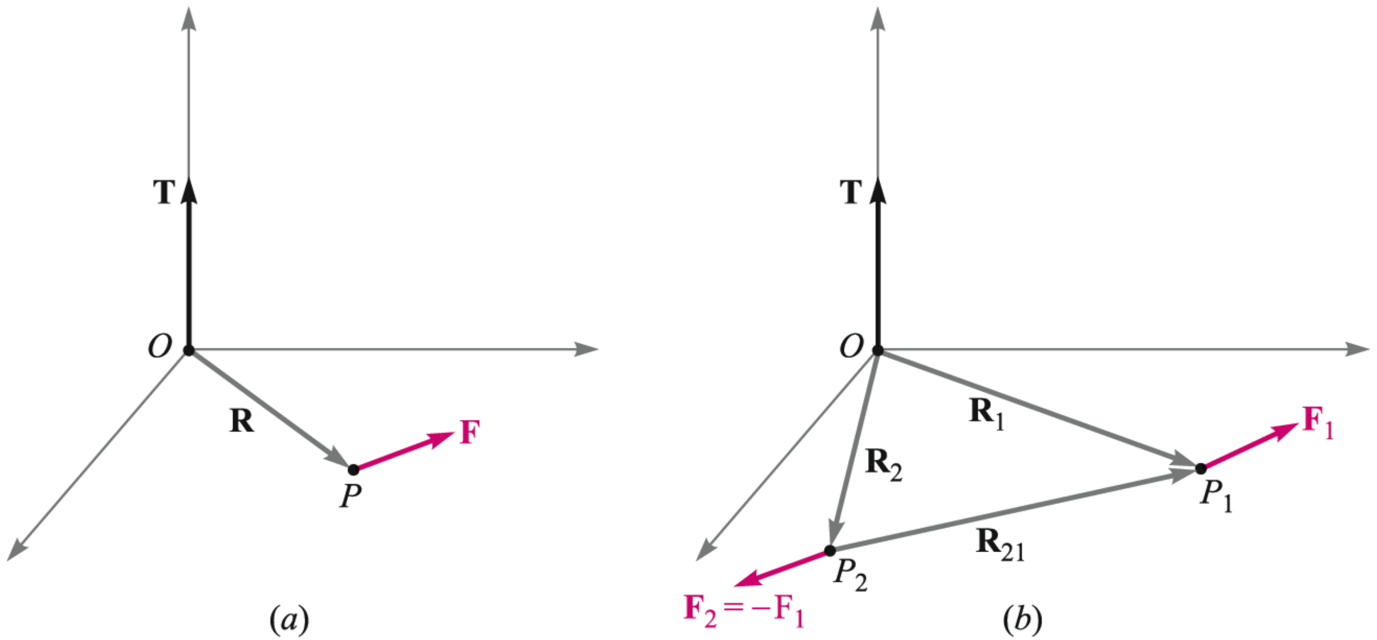
$$\mathbf{F} = -I\oint \mathbf{B} \times d\mathbf{L} = -I\,\mathbf{B} \times \oint d\,\mathbf{L} = 0$$

- 회전력
  - $\mathbf{T} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$
  - $\mathbf{T}_1 = \mathbf{R}_{12} \times \mathbf{F}_2$

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_2 \times \mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$$

$$\mathbf{T} = (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{R}_{21} \times \mathbf{F}_1$$



8.4 폐회로에 작용하는 힘과 회전력

- 미소전류루프에 작용하는 회전력

$$d\mathbf{F}_1 = Idx\mathbf{a}_x \times \mathbf{B}_0 = Idx(B_{0y}a_z - B_{0z}\mathbf{a}_y)$$

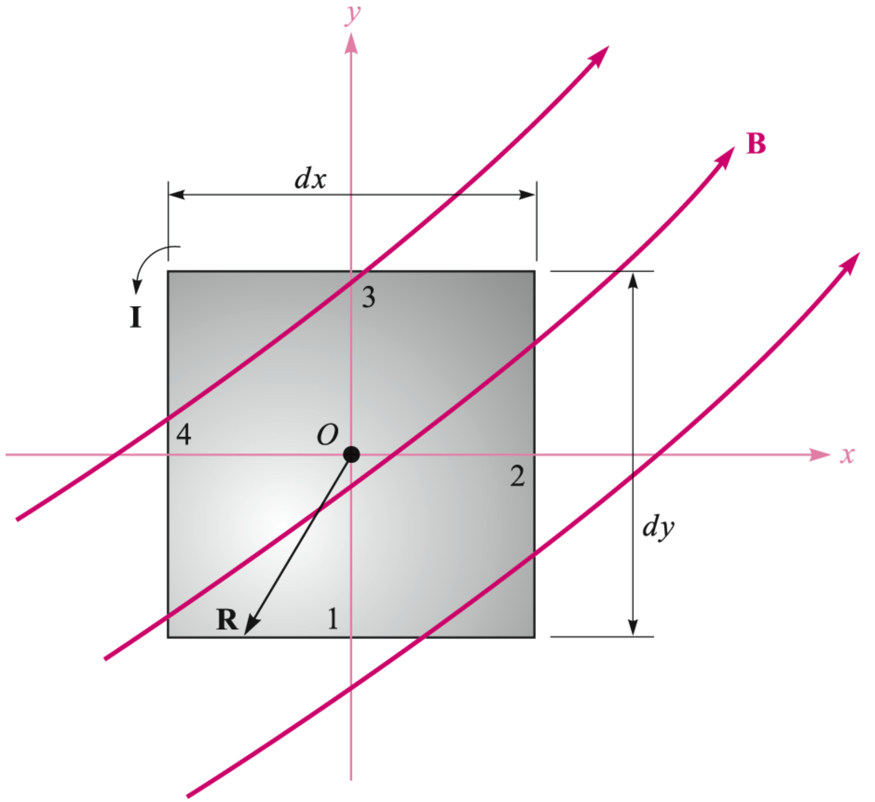
$$\mathbf{R}_1 = -\frac{1}{2}dy\mathbf{a}_y$$

$$d\mathbf{T}_1 = \mathbf{R}_1 \times d\mathbf{F}_1 = \cdots = -\frac{1}{2}dxdyIB_{0y}\mathbf{a}_x$$

$$d\mathbf{T} = d\mathbf{T}_1 + d\mathbf{T}_3 + d\mathbf{T}_2 + d\mathbf{T}_4$$

$$d\mathbf{T} = Id\mathbf{S} \times \mathbf{B} \quad \rightarrow \quad d\mathbf{T} = d\mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

($d\mathbf{m} = Id\mathbf{S}$: **미소자기쌍극자모멘트**)



- **평면루프에 작용하는 회전력**

$\boxed{T = I\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}}$, where $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$: **자기쌍극자모멘트**

[참고] 전기쌍극자모멘트 & 분극

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}, \mathbf{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathbf{p}_i$$

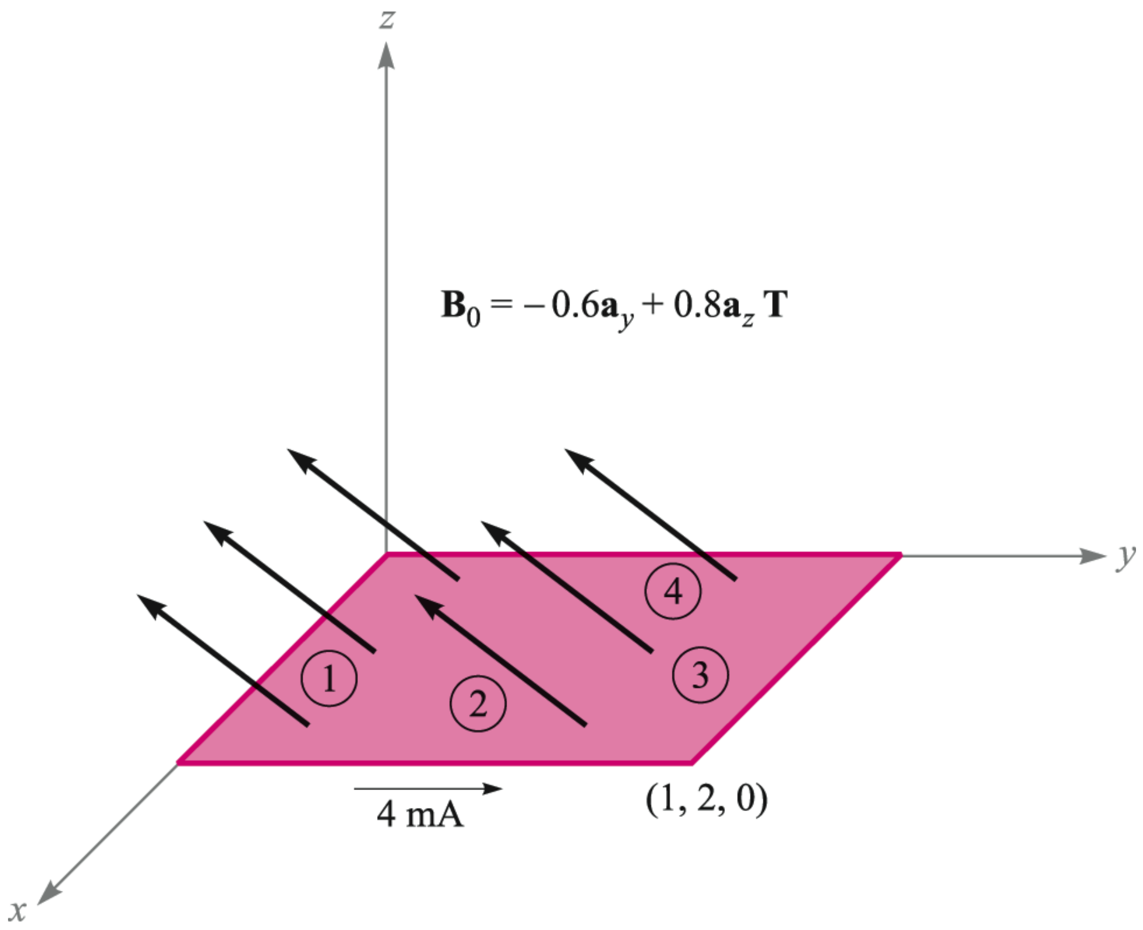
8.4 폐회로에 작용하는 힘과 회전력

- 예제 8.3) 평면루프에 작용하는 회전력?

$$\mathbf{T} = I\mathbf{S} \times \mathbf{B}$$

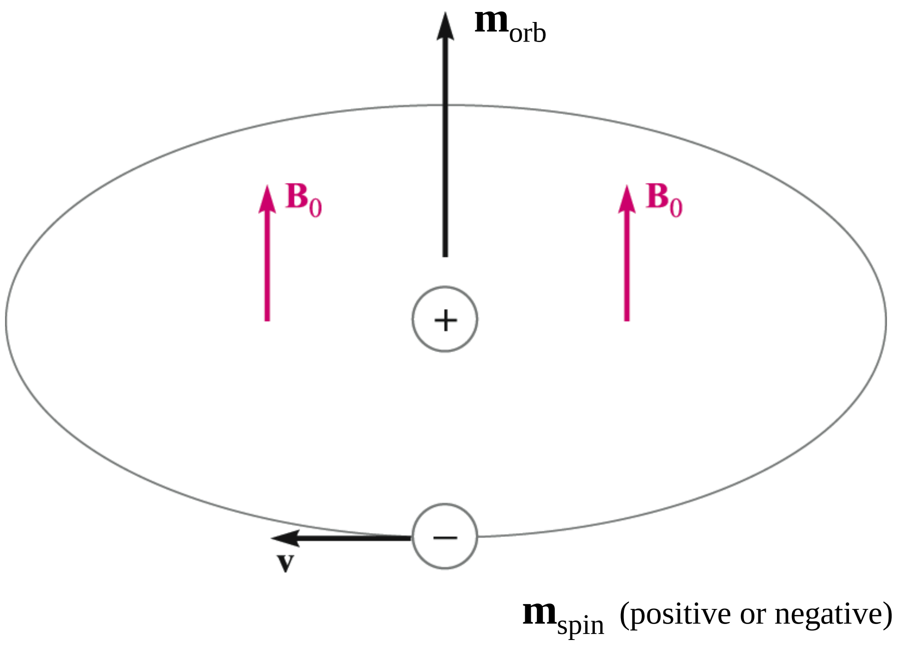
$$= 4 \times 10^{-3}[1 \times 2\mathbf{a}_z] \times (-0.6\mathbf{a}_y + 0.8\mathbf{a}_z)$$

$$= 4.8\mathbf{a}_x \ [\mathrm{mN} \cdot \mathrm{m}]$$



8.5 자성체의 성질

- 원자의 구조와 자기모멘트
  - 원자를 구성하는 전자는 원자핵의 주위를 궤도(orbit)운동을 하며, 전자 자신은 자전(spin)하는 회전운동을 함
  - 전자의 궤도운동
    : 궤도 자기모멘트 (orbit magnetic moment)
  - 전자의 자전운동
    : 스핀 자기모멘트 (spin magnetic moment)
  - 두 자기모멘트의 합으로 자성체의 종류 구분



8.5 자성체의 성질

- 역자성(diamagnetism)체
- 상자성(paramagnetism)체 : 공기, 물, 나무
- 강자성(ferromagnetism)체 : 철, 니켈, 코발트
- 반강자성(antiferromagnetism)체
- 페리자성(ferrimagnetism)체
- 초상자성(superparamagnetism)체

분류	자기모멘트	B값	비고
반자성	$\mathbf{m}_{\mathrm{orb}} + \mathbf{m}_{\mathrm{spin}} = 0$	$B_{\mathrm{int}} < B_{\mathrm{appl}}$	$B_{\mathrm{int}} \approx B_{\mathrm{appl}}$
상자성	$\mathbf{m}_{\mathrm{orb}} + \mathbf{m}_{\mathrm{spin}} =$ 작음	$B_{\mathrm{int}} > B_{\mathrm{appl}}$	$B_{\mathrm{int}} \approx B_{\mathrm{appl}}$
강자성	$\lvert\mathbf{m}_{\mathrm{spin}}\rvert \gg \lvert\mathbf{m}_{\mathrm{org}}\rvert$	$B_{\mathrm{int}} \gg B_{\mathrm{appl}}$	자구
반강자성	$\lvert\mathbf{m}_{\mathrm{spin}}\rvert \gg \lvert\mathbf{m}_{\mathrm{org}}\rvert$	$B_{\mathrm{int}} \simeq B_{\mathrm{appl}}$	이웃하는 자기모멘트가 상쇄
페리자성	$\lvert\mathbf{m}_{\mathrm{spin}}\rvert \gg \lvert\mathbf{m}_{\mathrm{org}}\rvert$	$B_{\mathrm{int}} > B_{\mathrm{appl}}$	이웃하는 자기모멘트가 완전히 상쇄; 작은 도전율
초상자성	$\lvert\mathbf{m}_{\mathrm{spin}}\rvert \gg \lvert\mathbf{m}_{\mathrm{org}}\rvert$	$B_{\mathrm{int}} > B_{\mathrm{appl}}$	비자성 매트릭스; 녹음테이프

8.6 자화 및 투자율

- 자화(magnetization); 자계가 물질에 작용했을 때 물질 내부에서 반응하는 정도
  - $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ [A/m]
  - 여기서, χ_m; 자화율(magnetic susceptibility)

$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}$

[참고] 자기분극 (자화와 혼용해서 사용됨) : $\mathbf{P}_m = \chi_m \mu_0 \mathbf{H}$

- 비투자율(relative permeability)
  - $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$

    여기서, μ_r; 비투자율(relative permeability) and μ; 투자율
  - $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{P}_m = \mu_0 \mathbf{H} + \chi_m \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H}$

$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$

8.6 자화 및 투자율

- Ex) $\mu_r = 50$인 페라이트에서 $B = 0.05$ [T]일 때 자화 $M = ?$

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H B = \mu_0 (H + M) \quad \rightarrow \quad H = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B = \frac{1}{50 \times 4\pi \times 10^{-7}} \times 0.05 = 796 \ [\mathrm{A/m}]$$

$$\therefore M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{0.05}{4\pi \times 10^{-7}} - 796 = 38992 \ [\mathrm{A/m}]$$

8.8 자기회로

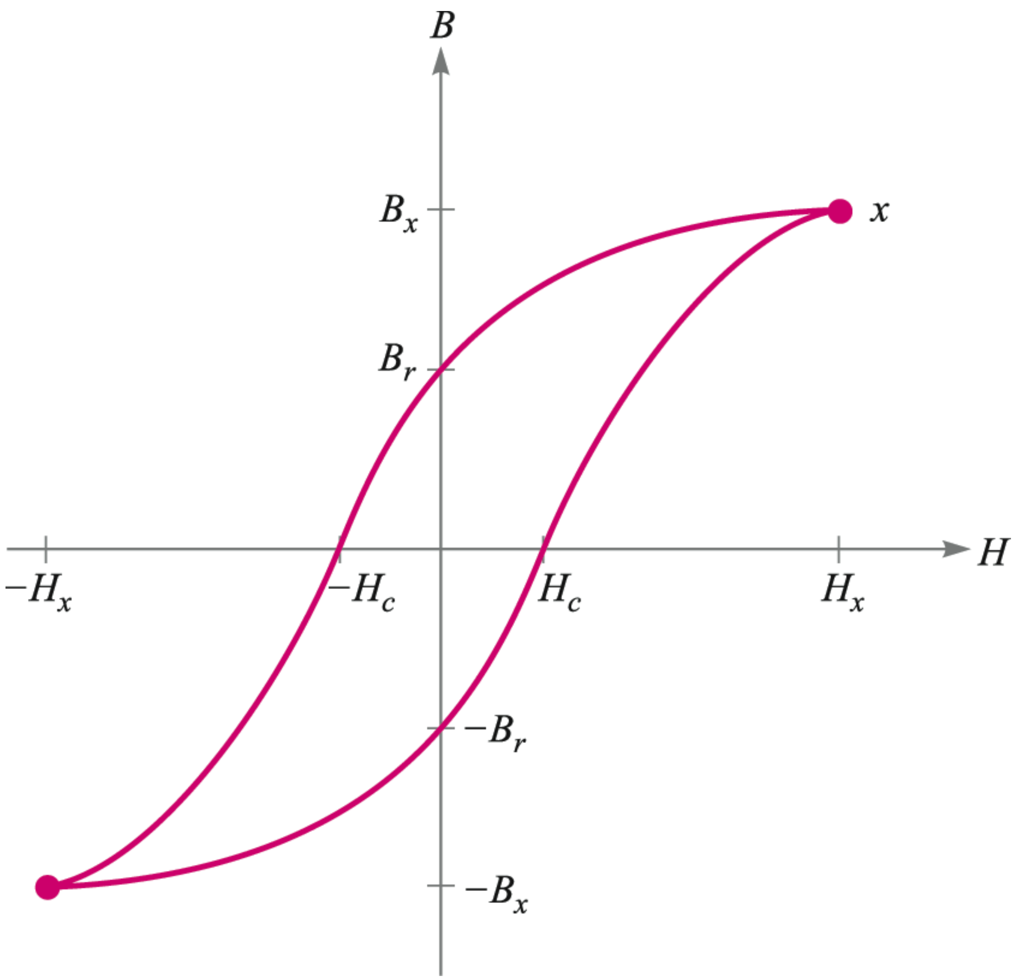
전기회로	자기회로
기전력(electromotive force)	자기력(magnetomotive force)
emf	mmf
V [V]	$V_{m,source} = NI$ [A · t]
$V = IR$	$V_m = \Phi\Re$
I [A]	Φ [Wb]
$R = \dfrac{d}{\sigma S}$ [Ω]	$\Re = \dfrac{d}{\mu S}$ [A · t/Wb] (리럭턴스)

Ex 1) $N = 500$, $S = 6[\mathrm{cm}^2]$, $\rho_0 = 15[\mathrm{cm}]$, $I = 4[\mathrm{A}]$인 토로이드 내부의 $H =?$

i) Ampere의 주회법칙 이용	ii) 자기회로 이용
$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = NI$ $H_\phi \cdot 2\pi\rho_0 = NI$ $H_\phi = \dfrac{NI}{2\pi\rho_0} = \dfrac{500 \times 4}{6.28 \times 0.15} = 2120\ [\mathrm{A/m}]$	$V_{m,source} = NI = 500 \times 4\ \ [\mathrm{A \cdot t}]$ $\mathfrak{R} = \dfrac{d}{\mu S} = \dfrac{2\pi \times 0.15}{4\pi \times 10^{-7} \times 6 \times 10^{-4}}$ $\Phi = \dfrac{V_{m,source}}{\mathfrak{R}} = \dfrac{2000}{1.25 \times 10^{9}} = 1.6 \times 10^{-6}\ [\mathrm{Wb}]$ $B = \dfrac{\phi}{S} = \dfrac{1.6 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-4}} = 2.67 \times 10^{-3}\ [\mathrm{T}]$ $H = \dfrac{B}{\mu} = \dfrac{2.67 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7}} = 2120\ [\mathrm{A \cdot t/m}]$

8.8 자기회로

- 자기이력곡선(magnetic hysteresis loop)
  - ➢ B_r : 잔류자속밀도
  - ➢ H_c : 보자력(coercive force)

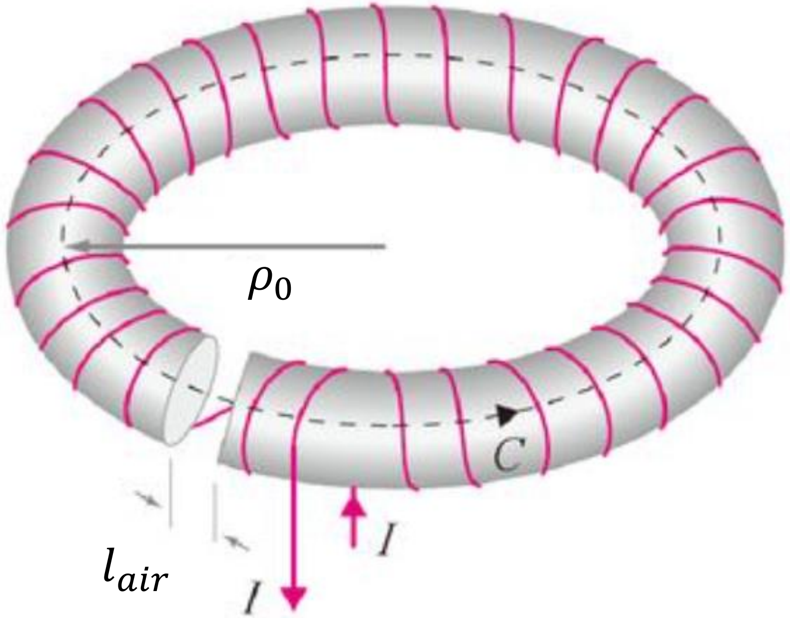


- Ex 2) $N = 500$, $S = 6[\mathrm{cm}^2]$, $\rho_0 = 15[\mathrm{cm}]$, $l_{air} = 2[\mathrm{mm}]$, 공극을 제외한 내부가 실리콘강인 토로이드에서 철심에서의 자속밀도를 $1[\mathrm{T}]$로 하기 위한 전류의 크기?

$$NI = V_{m,source} = V_{m,steel} + V_{m,air} = \Phi\mathfrak{R}_{steel} + \Phi\mathfrak{R}_{air}$$

$$\Phi = BS = 1(6 \times 10^{-4}) = 6 \times 10^{-4}[Wb]$$

$$\mathfrak{R} = \frac{d}{\mu S}$$



8.8 자기회로

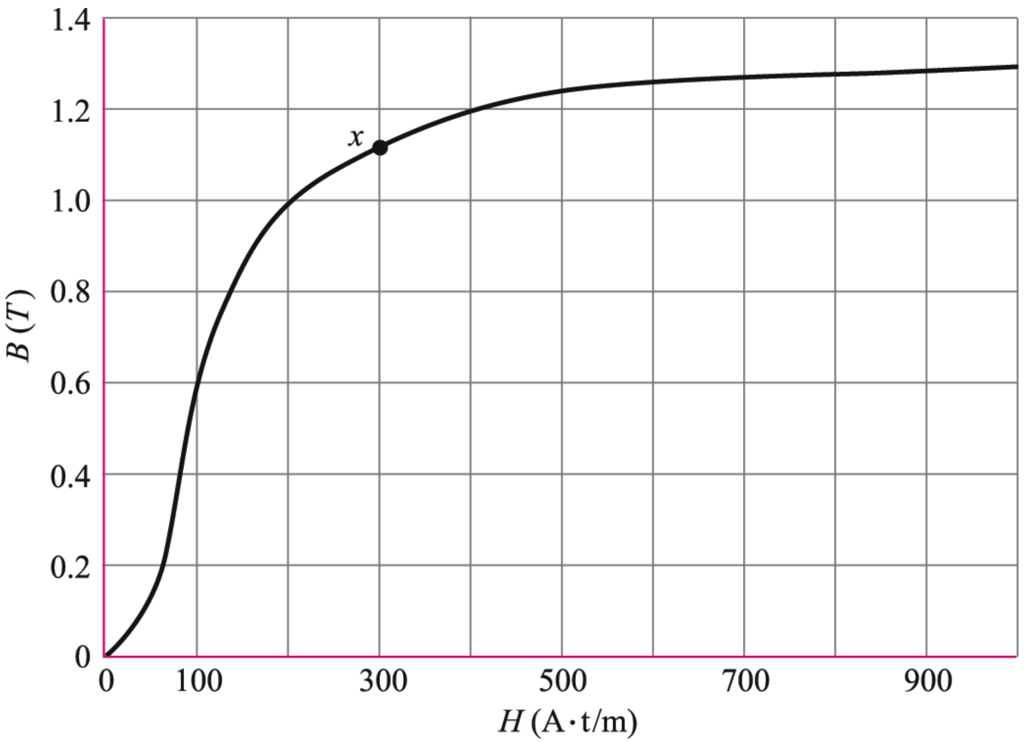
$$NI = V_{m,source} = V_{m,steel} + V_{m,air} = \Phi\Re_{steel} + \Phi\Re_{air}$$

$$\Phi = BS = 1(6 \times 10^{-4}) = 6 \times 10^{-4} \text{ [Wb]}$$

$$\Re_{steel} = \frac{d_{steel}}{\mu_{steel}S_{steel}} = \frac{2\pi \times 0.15}{1200 \times (6 \times 10^{-4})}$$

$$\left(\mu_{steel} = \frac{B_{steel}}{H_{steel}} = \frac{1}{200}\right)$$

$$= 0.314 \times 10^{6} \text{ [A} \cdot \text{t/Wb]}$$



$$\Re_{air} = \frac{d_{air}}{\mu_{air}S_{air}} = \frac{2 \times 10^{-3}}{(4\pi \times 10^{-7}) \times (6 \times 10^{-4})} = 2.65 \times 10^{6} \text{ [A} \cdot \text{t/Wb]}$$

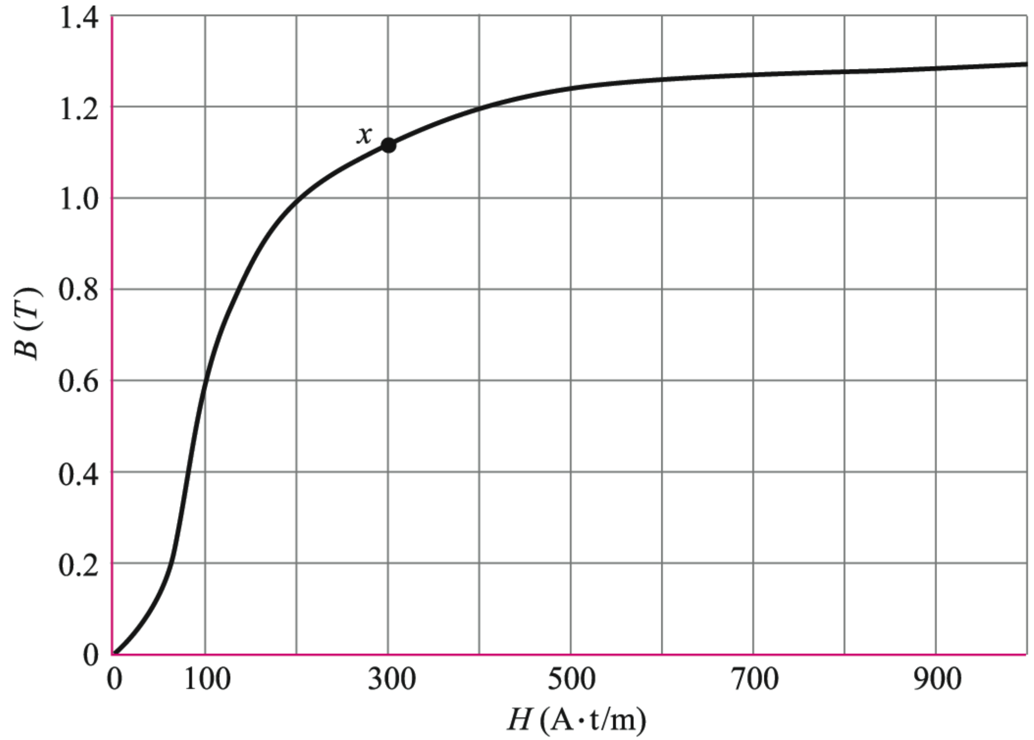
$$\therefore I = \frac{V_{m,source}}{N} = \frac{\Phi\Re_{steel} + \Phi\Re_{air}}{N} = \frac{6 \times 10^{-4}}{500}(0.314 + 2.65) \times 10^{6} = 3.557 \text{ [A]}$$

- Ex 3) $N = 500$, $S = 6[㎠]$, $\rho_0 = 15[㎝]$, $l_{air} = 2[mm]$, $I = 4[A]$, 공극을 제외한 내부가 실리콘강 (그림)인 토로이드에서 철심에서의 자속밀도 $B = ?$

$$NI = V_{m,source} = V_{m,steel} + V_{m,air} = \Phi\mathfrak{R}_{steel} + \Phi\mathfrak{R}_{air}$$

$$\Phi = \frac{NI}{\mathfrak{R}_{steel} + \mathfrak{R}_{air}} = \frac{500 \times 4}{(0.314 + 2.65) \times 10^6} = 6.75 \times 10^{-4}[Wb]$$

$$\therefore B_{steel} = \frac{\Phi}{S} = \frac{6.75 \times 10^{-4}}{6 \times 10^{-4}} = 1.125[T]$$



8.9 자성체에서의 포텐셜에너지와 힘

- 정상자계 내에 축적되는 총 에너지

$$W_H = \frac{1}{2}\int_{vol} \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_{vol} \mu H^2\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_{vol} \frac{B^2}{\mu}\,dv$$

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv = \frac{1}{2}\int_{vol} \varepsilon_0 E^2\,dv}$$

8.10 인덕턴스와 상호 인덕턴스

- 쇄교자속(flux linkage)
  - 권선수가 N인 토로이드 코일에 전류 I가 흘러 총 자속 Φ가 생기는 경우
    생성된 자속이 권선과 쇄교함 → 각 권선이 Φ와 쇄교하므로 쇄교자속은 $N\Phi$

- 인덕턴스 (inductance)
  - 총 쇄교자속과 쇄교하는 전류의 비

$$L = \frac{N\Phi}{I} \quad [\mathrm{H}: 헨리(\mathrm{Henri}) = \mathrm{Wb \cdot t/A}]$$

8.10 인덕턴스와 상호 인덕턴스

- 인덕턴스 (inductance)의 예
  - 반지름이 a인 긴 솔레노이드의 단위길이당 인덕턴스

$$H = nI \rightarrow B = \mu_0 nI, \Phi = BS = \mu_0 nIS$$

$$N = n \rightarrow L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 nIS}{I} = \pi\mu_0 n^2 a^2$$

  - 토로이드에서의 인덕턴스

$$B_\phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi\rho_0}, \Phi = \frac{\mu_0 NIS}{2\pi\rho_0} \rightarrow L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi\rho_0}$$

8.10 인덕턴스와 상호 인덕턴스

- 인덕턴스
  - 자체 인덕턴스 : 단일 인덕터에 의해서 발생하는 단위전류당 자속의 양
  - 상호 인덕턴스 : 다른 인덕터에 의해서 발생하는 단위전류당 자속의 양
- 상호인덕턴스 (mutual inductance)

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1}$$

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} = \frac{N_2}{I_1} \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}$$