Ch. 9. 시간에 따라 변하는 전자계와 맥스웰 방정식

9장. 시간에 따라 변하는 전자계와 맥스웰 방정식

1) 패러데이 법칙
2) 변위전류
3) 미분형 맥스웰 방정식
4) 적분형 맥스웰 방정식
5) 지연전위 및 지연자위

9.1 패러데이 법칙

- 시간에 따라 변하는 자계 →자계 내의 폐회로에 기전력 발생

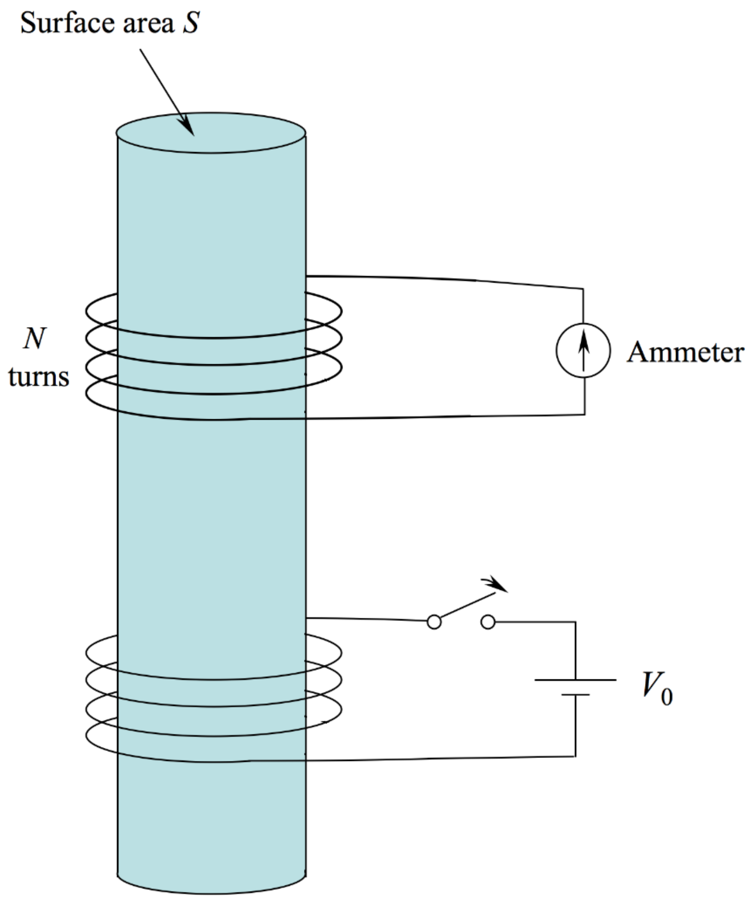
$\text{emf} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ [V], where Φ : 폐선로 내부의 면을 통과하는 자속

➢ $d\Phi/dt \neq 0$인 경우

❖ 정지된 폐곡로를 쇄교하면서 시간에 따라 변하는 자속

❖ 일정한 자속에서 상대적으로 운동하는 폐곡로

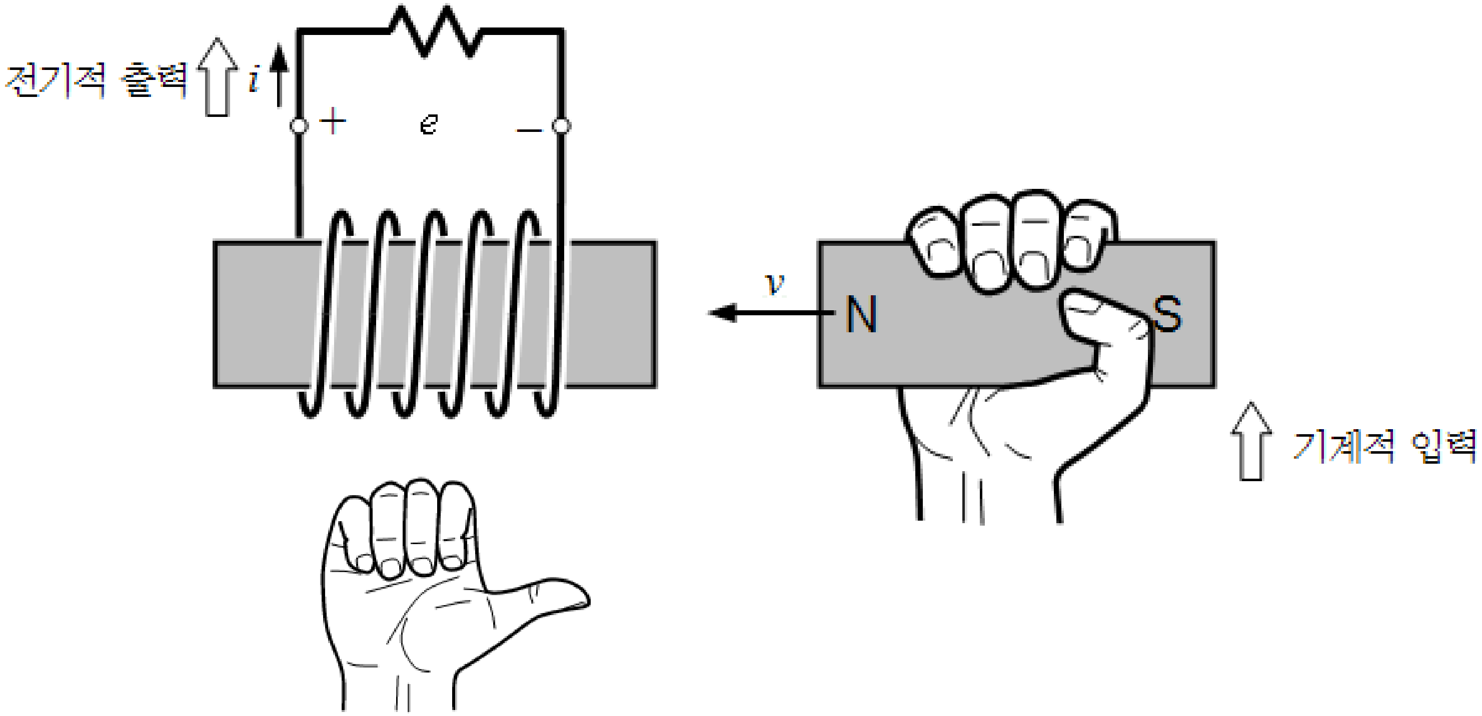
➢ 렌츠(Lenz)의 법칙 : 부호결정, 유도전압에 의한 자속은 원래 자속과는 반대 방향으로 생성



9.1 패러데이 법칙

- 권선수가 N인 폐곡로의 경우

$$\text{emf} = -N\frac{d\Phi}{dt}$$



9.1 패러데이 법칙

- 패러데이 법칙 (적분형)

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

- 총 기전력 = 정지폐곡로 (시간에 따라 변하는 자속) + 일정한 자속 (운동하는 폐곡로)

- 정지폐곡로 내의 시변 자계

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{L} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \ \leftarrow \text{Stokes}'\text{theory}$$

$$\Rightarrow (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$: 미분형 패러데이 법칙

[비교] 정전계

$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad and \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$

9.1 패러데이 법칙

- 정상자계 움직이는 폐곡로 (그림 9.1)
  - 임의의 시간 t에 폐곡로 내부를 관통하는 자속 : $\Phi = Byd$

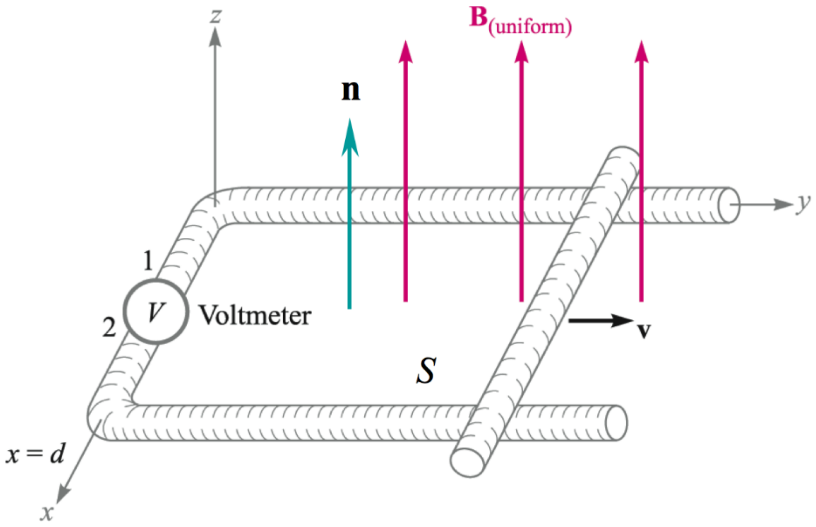
$$\text{emf} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dy}{dt} = -Bvd$$

  - 자속 밀도 **B**내에서 속도 **v**로 운동하는 전하 Q에 작용하는 힘

$$\mathbf{F} = Q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} \;\; or \;\; \frac{\mathbf{F}}{Q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

  - 운동 전계세기 (motional electric field intensity)

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

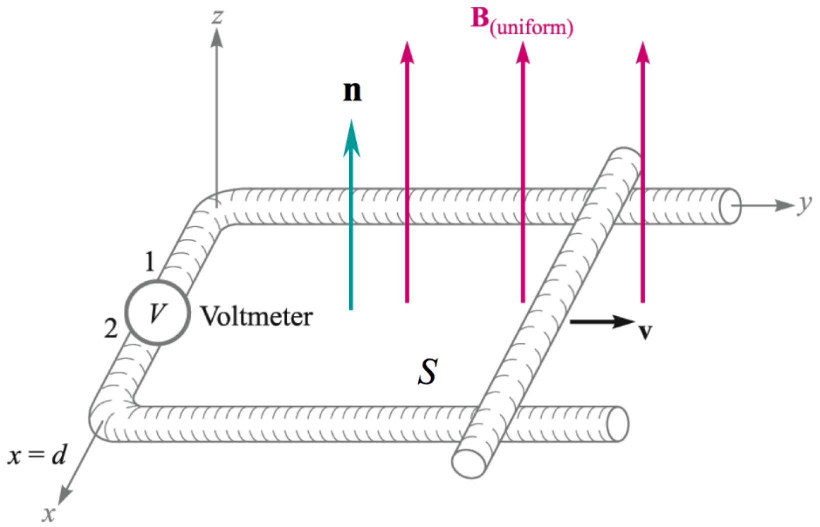


9.1 패러데이 법칙

- 정상자계 움직이는 폐곡로 (그림 9.1)
  - 도체 막대에 의한 운동 기전력(motional emf)

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E}_m \cdot dL = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}$$

$$\oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} = \int_d^0 v\,B dx = -Bvd$$



- 전체 기전력

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}$$

- [응용예제 9.1] $\epsilon = 10^{-11}$[F/m], $\mu = 10^{-5}$[H/m], $B_x = 2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \ \sin 10^{-3} y$[T].

  (a) $\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, $\mathbf{E}$?

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}(\nabla \times \mathbf{B}) = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (\because \mathbf{B} = \mu \mathbf{H})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} B_x \mathbf{a}_y - \frac{\partial}{\partial y} B_x \mathbf{a}_z$$

$$= -\frac{\partial}{\partial y}(2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \sin 10^{-3} y)\, \mathbf{a}_z$$

$$= -2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \ \frac{\partial}{\partial y} \sin 10^{-3} y \, \mathbf{a}_z$$

$$= -2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \ 10^{-3} \cos 10^{-3} y \, \mathbf{a}_z$$

$$= -2 \times 10^{-7} \cos 10^5 t \ \cos 10^{-3} y \, \mathbf{a}_z$$

$$\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu}(\nabla \times \mathbf{B}) = -2 \times 10^{-7} \cos 10^5 t \ \cos 10^{-3} y \, \mathbf{a}_z$$

9.1 패러데이 법칙

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{\mu\epsilon}\int -2\times 10^{-7}\cos 10^{5}t\ \cos 10^{-3}y\,dt\,\mathbf{a}_z \\ &= -\frac{1}{\mu\epsilon}2\times 10^{-7}\cos 10^{-3}y\int \cos 10^{5}t\,dt\,\mathbf{a}_z \\ &= -\frac{2\times 10^{-7}\cos 10^{-3}y}{10^{-11}\times 10^{-5}}\times 10^{-5}\sin 10^{5}t\,\mathbf{a}_z \\ &= -2\times 10^{4}\cos 10^{-3}y\sin 10^{5}t\,\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

9.1 패러데이 법칙

- (b) $t = 1\ [\mu S]$, $x = 0$, $0 < y < 40$ [m], $0 < z < 2$ [m]인 면을 관통하는 전체 자속 Φ?

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \int_{y=0}^{40} \int_{z=0}^{2} B_x\, dzdy \quad (\leftarrow \mathbf{B}\text{와 } \mathbf{S}\text{는 평행})$$

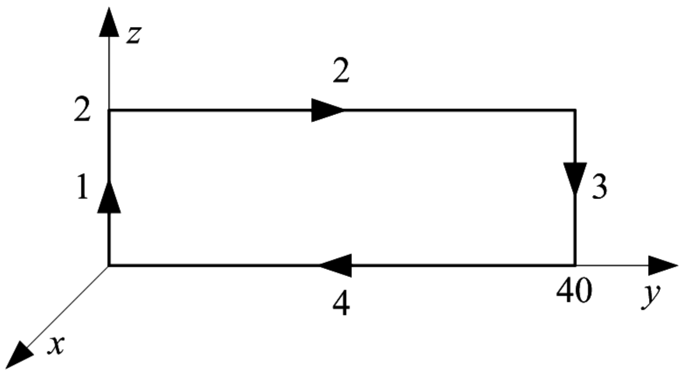
$$= \int_{y=0}^{40} \int_{z=0}^{2} 2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t\ \sin 10^{-3} y dzdy = 2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \int_{y=0}^{40} \sin 10^{-3} y \int_{z=0}^{2} d\, zdy$$

$$= 4 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \int_{y=0}^{40} \sin 10^{-3} y dy = 4 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \times \frac{1}{10^{-3}} [-\cos 10^{-3} y]_0^{40}$$

$$= 4 \times 10^{-1} \cos 10^5 t \times (\cos 0 - \cos 0.04)$$

$$= 0.4 \times \cos 0.1 \times (1 - 0.9992) \quad (\leftarrow t = 10^{-6})$$

$$= 0.3184 \times 10^{-3}\ [\mathrm{Wb}]$$



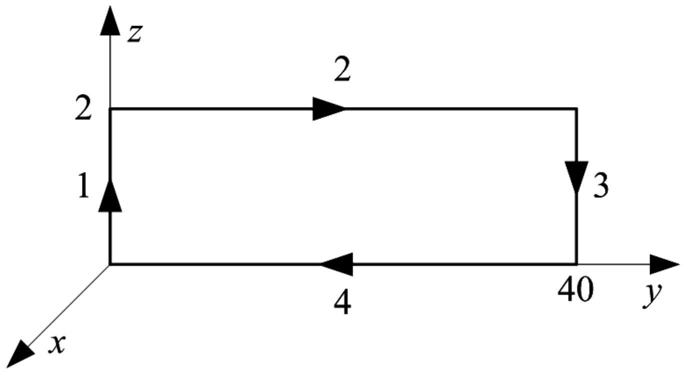
9.1 패러데이 법칙

- (c) (b)의 주위의 $\mathbf{E}$의 선적분?

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = \text{emf}$$

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = \int_1 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} + \int_2 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} + \int_3 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} + \int_4 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$$

$$= \int_1 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} + \int_3 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} \quad \leftarrow \int_2 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = \int_4 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = 0$$



$$\int_1 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = \int_0^2 E_z\,dz\Big|_{y=0}$$

$$= \int_0^2 -2\times 10^4 \cos 10^{-3} y \sin 10^5 t\,dz\Big|_{y=0}$$

$$= -2\times 10^4 \cos 10^{-3} y \sin 10^5 t \int_0^2 dz\Big|_{y=0}$$

$$= -20000 \times \cos 0 \times \sin 0.1 \times 2$$

9.1 패러데이 법칙

$$\int_3 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = \int_2^0 E_z\, dz\Big|_{y=40}$$

$$= \int_2^0 -2\times 10^4 \cos 10^{-3} y \sin 10^5 t\, dz\Big|_{y=40}$$

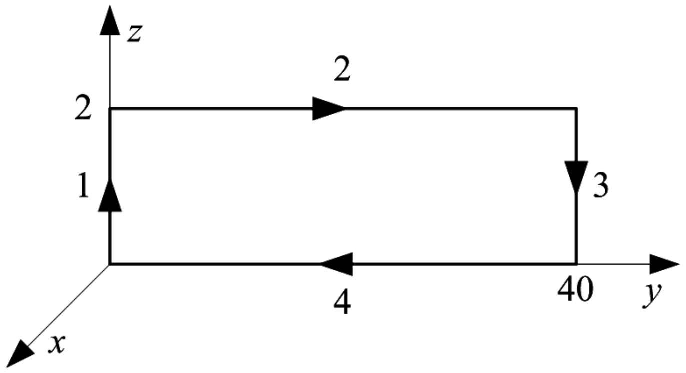
$$= -2\times 10^4 \cos 10^{-3} y \sin 10^5 t \int_2^0 d\,z\Big|_{y=40}$$

$$= -20000 \times \cos 0.04 \times \sin 0.1 \times (-2)$$

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = \int_1 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} + \int_3 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$$

$$= 40000 \times \sin 0.1 \times (-\cos 0 + \cos 0.04)$$

$$= -3.1942\ [\mathrm{V}]$$



- [응용예제 9.2] $d = 7$ [cm], $B = 0.3\mathbf{a}_z$ [T], $v = 0.1\mathbf{a}_y e^{20y}$[m/s], $t = 0$일 때 $y = 0$.

  - (a) $v(t = 0)$

    $v = 0.1e^{20y} = 0.1e^0 = 0.1$ [m/s]

  - (b) $y(t = 0.1)$

    $$v = \frac{dy}{dt} = 0.1e^{20y}$$

    $$\frac{1}{0.1e^{20y}}dy = dt$$

    $$\int 10e^{-20y}dy = \int dt$$

    $$\frac{10}{-20}e^{-20y} = t + c$$

    $$-0.5e^{-20y} = t + c$$

    $$e^{-20y} = -2t - 2c$$

    $$-20y = \ln(-2t - 2c)$$

    $$y = -\frac{1}{20}\ln(-2t - 2c)$$

    $$y = -\frac{1}{20}\ln(-2t + 1) \quad \leftarrow t = 0,\ y = 0,\ -0.5e^0 = c \rightarrow c = -0.5$$

    $$y(t = 0.1) = -\frac{1}{20}\ln(-2 \times 0.1 + 1) = 0.01115 = 1.115 \text{ [cm]}$$

9.1 패러데이 법칙

- (c) $v(t = 0.1)$

$$v = 0.1e^{20y}\Big|_{y=0.01115}$$
$$= 0.1e^{20\times0.01115}$$
$$= 0.125[m/s]$$

- (d) V_{12} at $t = 0.1$

$$\text{emf} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dy}{dt}d = -Bvd$$
$$V_{12} = -0.3 \times 0.125 \times 7 \times 10^{-2}$$
$$= -2.625 \times 10^{-3}$$
$$= -2.625\ [\text{mV}]$$

9.2 변위전류

- 전계가 시간에 따라 변하는 경우

  - 정상자계 : 암페어의 주회법칙에서

    $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$

    $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} \equiv 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}$

  - 시변자계

    $$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

    $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{G}, \quad where\ \mathbf{G}$: 미지항

    $$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{G} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

    $$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

9.2 변위전류

- 변형된 미분형 암페어의 주회법칙

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\ , \ where\ \mathbf{J}_d : \text{변위 전류 밀도}$$

- cf. 체적 전하밀도가 0인 매질($\mathbf{J} = 0$)에서

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad vs. \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- 표면을 통과하는 총 변위전류

$$I_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

  - ✓ Stokes' law

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + I_d = I + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

9.3 맥스웰 방정식

- 미분형 및 적분형 맥스웰 방정식

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{vol} \rho_v \, dv$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

- 보조 방정식

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$: 전도전류밀도

$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v}$: 체적전하밀도에 의한 대류전류밀도