

1 미분공식

1.1 미분의 기본 공식

f 와 g 를 미분 가능한 함수라 하면

- (선형성)
 - $(cf)' = cf'$ (c 는 상수)
 - $(f+g)' = f' + g'$
 - $(f-g)' = f' - g'$
- (곱의 법칙)
 - $(fg)' = f'g + fg'$
- (연쇄 법칙)
 - $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$

확장된 미분의 기본 공식

조금 더 넓게 다음까지도 기본 공식으로 취급하기도 한다.

- (역수 법칙)
 - $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$
- (몫의 법칙)
 - $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (단, $g \neq 0$)
- (역함수 법칙)
 - $f(g(y)) = y$ 라 하면 $g' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

1.2 단순한 함수의 미분

- $\frac{d}{dx}c = 0$
- $\frac{d}{dx}x = 1$
- $\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|} = \text{sgn } x, \quad x \neq 0$
- $\frac{d}{dx}x^c = cx^{c-1}$
- $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$

1.3 지수함수와 로그 함수의 미분

- $\frac{d}{dx}a^{f(x)} = a^{f(x)}f'(x)\ln a, \quad a > 0$
- $\frac{d}{dx}c^x = c^x \ln c, \quad c > 0$
- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx}\log_c x = \frac{1}{x \ln c}, \quad c > 0, c \neq 1$
- $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

1.4 삼각함수의 미분

- $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
- $\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}\csc x = -\frac{1}{\tan x \sin x} = -\cot x \csc x$
- $\frac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$
- $\frac{d}{dx}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$
- $\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx}\csc^{-1} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}\cot^{-1} x = \frac{-1}{1+x^2}$

1.5 쌍곡선 함수의 미분

- $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$
- $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$
- $\frac{d}{dx}\tanh x = \text{sech}^2 x$
- $\frac{d}{dx}\text{csch } x = -\coth x \text{csch } x$
- $\frac{d}{dx}\text{sech } x = -\tanh x \text{sech } x$
- $\frac{d}{dx}\coth x = -\text{csch}^2 x$
- $\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $\frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$
- $\frac{d}{dx}\text{csch}^{-1} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\text{sech}^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\coth^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$

2 적분공식

적분은 미분처럼 간단하지 않기 때문에, 여러 함수에 대한 적분을 모아 놓은 적분표는 매우 유용하게 사용된다. 식에 나오는 C 는 적분 상수를 나타낸다.

2.1 일반적인 적분규칙

- $\int af(x) dx = a \int f(x) dx \quad (a \text{ constant})$
- $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int f(x)g(x) dx = f(x) \int g(x) dx - \int [f'(x) \left(\int g(x) dx \right)] dx$
- $\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad (\text{for } n \neq -1)$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$
- $\int f'(x)f(x) dx = \frac{1}{2}[f(x)]^2 + C$

2.2 유리함수

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{if } n \neq -1$
- $\int x^{-1} dx = \ln|x| + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

2.3 무리함수

- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
- $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$
- $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \text{arcsec } x + C$

2.4 로그|로그함수

- $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$
- $\int \log_a x dx = x \log_a x - \frac{x}{\ln a} + C$

2.5 지수함수

- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

2.6 삼각함수

- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$

- $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$
- $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$
- $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
- $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$
- $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
- $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
- $\int \sin^2 mx dx = \frac{1}{2m}(mx - \sin mx \cos mx) + C$
- $\int \cos^2 mx dx = \frac{1}{2m}(mx + \sin mx \cos mx) + C$
- $\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx + C$
- $\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx + C$
- $\int \sec^n x dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \cos^{n-2} x dx + C$
- $\int \csc^n x dx = \frac{\csc^{n-2} x \cot x}{-(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x dx + C$

2.7 쌍곡선함수

- $\int \sinh x dx = \cosh x + C$
- $\int \cosh x dx = \sinh x + C$
- $\int \tanh x dx = \ln(\cosh x) + C$
- $\int \text{csch } x dx = \ln \left| \tanh \frac{x}{2} \right| + C$
- $\int \text{sech } x dx = \arctan(\sinh x) + C$
- $\int \text{coth } x dx = \ln|\sinh x| + C$

2.8 정적분

어떤 함수의 적분은 초등 함수로 나타낼 수 없지만, 특정 구간에서의 적분값을 계산할 수는 있다. 다음은 그들 중 유용한 몇 정적분이다.

- $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$
- $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$
- $\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}$
- $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$
- $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$