제 9 장

시간에 따라 변하는 전자계와 맥스웰 방정식

9.1 패러데이 법칙

- 시간에 따라 변하는 자계 $\rightarrow$ 자계 내의 폐회로에 기전력 발생

$$\text{emf} = -\frac{d\Phi}{dt}[\text{V}], \text{ where } \Phi : \text{폐선로 내부의 면을 통과하는 자속}$$

- $d\Phi/dt \neq 0$ 인 경우
  - 정지된 폐곡로를 쇄교하면서 시간에 따라 변하는 자속
  - 일정한 자속에서 상대적으로 운동하는 폐곡로
- 렌츠(Lenz)의 법칙 : 부호결정, 유도전압에 의한 자속은 원래 자속과는 반대 방향으로 생성
- 권선수가 N 인 폐곡로의 경우

$$\text{emf} = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

- 기전력의 정의

$$\begin{aligned} \text{emf} &= \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} \\ &\downarrow \\ \text{emf} &= \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

- 총 기전력 = 정지폐곡로 (시간에 따라 변하는 자속) + 일정한 자속 (운동하는 폐곡로)

- 정지폐곡로 내의 시변 자계

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\downarrow \text{Stokes's law}$$

$$\int_S (\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\Rightarrow (\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\boxed{\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} : \text{맥스웰 방정식의 미분형}}$$

cf. 정전계

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = 0 \;\; and \;\; \nabla\times\mathbf{E} = 0$$

- 정상자계 움직이는 폐곡로 (그림 9.1)
  - 임의의 시간 t 에 폐곡로 내부를 관통하는 자속 : $\Phi = Byd$

$$\text{emf} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dy}{dt} = -Bvd$$

  - 자속 밀도 $\mathbf{B}$ 내에서 속도 $\mathbf{v}$ 로 운동하는 전하 Q 에 작용하는 힘

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{v}\times\mathbf{B} \;\; or \;\; \frac{\mathbf{F}}{Q} = \mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

  - 운동 전계세기 (motional electric field intensity)

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

  - 도체 막대에 의한 운동 기전력 (motional emf)

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E}_m\cdot dL = \oint (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{L}$$

$$\oint (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{L} = \int_d^0 vBdx = -Bvd$$

- 전체 기전력

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} + \oint (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{L}$$

[응용예제 9.1] $\varepsilon = 10^{-11}$[F/m], $\mu = 10^{-5}$[H/m], $B_x = 2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \; \sin 10^{-3} y$[T].

(a) $\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, $\mathbf{E}$?

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}(\nabla \times \mathbf{B}) = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\because \mathbf{B} = \mu \mathbf{H})$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} B_x \mathbf{a}_y - \frac{\partial}{\partial y} B_x \mathbf{a}_z \\
&= -\frac{\partial}{\partial y}\left(2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \; \sin 10^{-3} y\right) \mathbf{a}_z \\
&= -2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \; \frac{\partial}{\partial y} \sin 10^{-3} y \, \mathbf{a}_z \\
&= -2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \; 10^{-3} \cos 10^{-3} y \, \mathbf{a}_z \\
&= -2 \times 10^{-7} \cos 10^5 t \; \cos 10^{-3} y \, \mathbf{a}_z
\end{aligned}$$

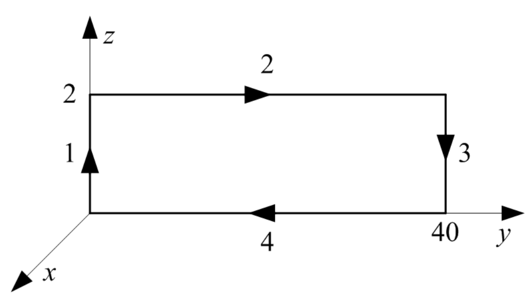
$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu}(\nabla \times \mathbf{B}) = -2 \times 10^{-7} \cos 10^5 t \; \cos 10^{-3} y \, \mathbf{a}_z$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{\mu\varepsilon} \int -2 \times 10^{-7} \cos 10^5 t \; \cos 10^{-3} y \, dt \, \mathbf{a}_z \\
&= -\frac{1}{\mu\varepsilon} 2 \times 10^{-7} \cos 10^{-3} y \int \cos 10^5 t \, dt \, \mathbf{a}_z \\
&= -\frac{2 \times 10^{-7} \cos 10^{-3} y}{10^{-11} \times 10^{-5}} \times 10^{-5} \sin 10^5 t \, \mathbf{a}_z \\
&= -2 \times 10^4 \cos 10^{-3} y \sin 10^5 t \, \mathbf{a}_z
\end{aligned}$$

(b) $t = 1$ [μs], $x = 0$, $0 < y < 40$[m], $0 < z < 2$[m] 인 면을 관통하는 전체 자속 Φ?

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\
&\downarrow \mathbf{B} \text{ 와 } \mathbf{S} \text{ 는 평행} \\
&= \int_{y=0}^{40} \int_{z=0}^{2} B_x dz dy \\
&= \int_{y=0}^{40} \int_{z=0}^{2} 2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \ \sin 10^{-3} y dz dy \\
&= 2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \int_{y=0}^{40} \sin 10^{-3} y \int_{z=0}^{2} dz dy \\
&= 4 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \int_{y=0}^{40} \sin 10^{-3} y dy \\
&= 4 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \times \frac{1}{10^{-3}} \left[-\cos 10^{-3} y \right]_0^{40} \\
&= 4 \times 10^{-1} \cos 10^5 t \times (\cos 0 - \cos 0.04) \\
&\downarrow t = 10^{-6} \\
\Phi &= 0.4 \times \cos 0.1 \times (1 - 0.9992) \\
&= 0.4 \times 0.995 \times 0.0008 \\
&= 0.3184 \times 10^{-3} \,[\text{Wb}]
\end{aligned}
$$

(c) (b) 의 주위의 $\mathbf{E}$ 의 선적분 ?



$$
\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \text{emf}
$$

$$
\begin{aligned}
\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} &= \int_1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_4 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\
&\downarrow \int_2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_4 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \\
&= \int_1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_1 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} &= \int_0^2 E_z dz\bigg|_{y=0} \\
&= \int_0^2 -2\times 10^4 \cos 10^{-3}y \sin 10^5 t\, dz\bigg|_{y=0} \\
&= -2\times 10^4 \cos 10^{-3}y \sin 10^5 t \int_0^2 dz\bigg|_{y=0} \\
&= -20000\times \cos 0\times \sin 0.1\times 2 \\
&= -40000\times \cos 0\times \sin 0.1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_3 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} &= \int_2^0 E_z dz\bigg|_{y=40} \\
&= \int_2^0 -2\times 10^4 \cos 10^{-3}y \sin 10^5 t\, dz\bigg|_{y=40} \\
&= -2\times 10^4 \cos 10^{-3}y \sin 10^5 t \int_2^0 dz\bigg|_{y=40} \\
&= -20000\times \cos 0.04\times \sin 0.1\times (-2) \\
&= 40000\times \cos 0.04\times \sin 0.1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} &= \int_1 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} + \int_3 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} \\
&= 40000\times \sin 0.1\times (-\cos 0 + \cos 0.04) \\
&= -3.1942\,[\mathrm{V}]
\end{aligned}
$$

[응용예제 9.2] $d = 7\text{cm}$, $B = 0.3\mathbf{a}_z[\mathrm{T}]$, $v = 0.1\mathbf{a}_y e^{20y}[\mathrm{m/s}]$, $t = 0$ 일 때 $y = 0$.

(a) $v(t = 0)$

$$
v = 0.1e^{20y} = 0.1e^0 = 0.1\ [\mathrm{m/s}]
$$

(b) $y(t=0.1)$

$$v = \frac{dy}{dt} = 0.1e^{20y}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{0.1e^{20y}}dy &= dt \\
\int 10e^{-20y}dy &= \int dt \\
\frac{10}{-20}e^{-20y} &= t + c \\
-0.5e^{-20y} &= t + c \\
e^{-20y} &= -2t - 2c \\
-20y &= \ln(-2t - 2c) \\
y &= -\frac{1}{20}\ln(-2t - 2c) \\
&\downarrow \quad t = 0,\, y = 0,\, -0.5e^{0} = c \rightarrow c = -0.5 \\
y &= -\frac{1}{20}\ln(-2t + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t=0.1) &= -\frac{1}{20}\ln(-2 \times 0.1 + 1) \\
&= 0.01115 \\
&= 1.115 \text{ [cm]}
\end{aligned}$$

(c) $v(t=0.1)$

$$\begin{aligned}
v &= 0.1e^{20y}\Big|_{y=0.01115} \\
&= 0.1e^{20\times 0.01115} \\
&= 0.125 \text{ [m/s]}
\end{aligned}$$

(d) V_{12} at $t = 0.1$

$$\begin{aligned}
\text{emf} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dy}{dt}d = -Bvd \\
V_{12} &= -0.3 \times 0.125 \times 7 \times 10^{-2} \\
&= -2.625 \times 10^{-3} \\
&= -2.625 \text{ [mV]}
\end{aligned}$$

9.2 변위전류

- 전계가 시간에 따라 변하는 경우
  - 정상자계 : 암페어의 주회법칙에서

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$
$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} \equiv 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

  - 시변자계

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{G}, \ \textit{where}\ \mathbf{G} : \text{미지항}$$
$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{G}$$
$$\Rightarrow \ \mathbf{G} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$
$$\downarrow$$
$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

  - 변형된 미분형 암페어의 주회법칙

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \ \textit{where}\ \mathbf{J}_d : \text{변위 전류 밀도}$$

cf. 체적 전하밀도가 0 인 매질 ($\mathbf{J} = 0$) 에서

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \textit{vs.} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

  - 표면을 통과하는 총 변위전류

$$I_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

  - Stokes' law

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + I_d = I + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

9.3 맥스웰 방정식

- 미분형 및 적분형 맥스웰 방정식

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad &\Longleftrightarrow \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{vol} \rho_v dv \\
\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad &\Longleftrightarrow \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\
\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad &\Longleftrightarrow \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0
\end{aligned}
$$

- 보조 방정식

$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$

$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$: 전도전류밀도

$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v}$: 체적전하밀도에 의한 대류전류밀도